ROZDZIAŁ I

CIĄGI I SZEREGI

§ 1. Wstęp

1.1. Różne rodzaje liczb. Przyjmować będziemy, że pojęcie liczby rzeczywistej, tj. — poglądowo mówiąc — liczby, posiadającej rozwinięcie skończone lub nieskończone na ułamek dziesiętny, jest znane z kursu szkoły średniej ([1]). Przypomnimy terminologię i niektóre własności liczb rzeczywistych.

Liczby całkowite dodatnie, tj. liczby $1, 2, 3, \ldots$, nazywamy liczbami *naturalnymi*. Liczby 0 nie zaliczamy ani do liczb dodatnich, ani ujemnych. Liczby ułamkowe, tj. liczby postaci

$$\frac{p}{q} \quad (\text{lub } p/q),$$

gdzie p i q są liczbami całkowitymi, przy czym $q \neq 0$, nazywamy liczbami *wymiernymi*. W obrębie liczb wymiernych wykonalne są zawsze cztery działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, z wyjątkiem dzielenia przez 0; symbolowi $p/0$ nie przypisujemy żadnej wartości liczbowej. Symbol ∞, którego często używać będziemy, nie oznacza więc żadnej liczby („nieskończonej").

Geometrycznie można liczby rzeczywiste wyobrażać sobie jako punkty linii prostej, na której zaznaczone zostały punkty 0 i 1. Te dwa punkty pozwalają z łatwością wyznaczyć na prostej (którą nazywać będziemy *prostą liczbową*) wszystkie punkty wymierne. Mianowicie, mając daną liczbę wymierną w, odmierzamy na prawo, względnie na lewo od punktu 0, w zależności od znaku liczby w, odcinek długości w. Koniec tego odcinka jest punktem odpowiadającym liczbie w. Jak wiadomo, nie wszystkie punkty linii prostej odpowiadają liczbom wymiernym. Na przykład liczba $\sqrt{2}$, tj. długość przekątni kwadratu o boku równym 1, jest liczbą niewymierną.

([1]) W §§ 1.8 i 1.9 podajemy szkicowo dwie metody ścisłego wprowadzenia liczby rzeczywistej: jedną aksjomatyczną, drugą sprowadzającą pojęcie liczby rzeczywistej do pojęcia liczby wymiernej.

Zarówno względy natury geometrycznej jak i algebraicznej skłaniają nas do objęcia pojęciem liczby wszystkich liczb rzeczywistych, tj. zarówno wymiernych jak i niewymiernych. Wzrasta przez to zasięg działań algebraicznych: w dziedzinie rzeczywistej wykonalne jest pierwiastkowanie i logarytmowanie liczb dodatnich.

Dodajmy, że i w dziedzinie rzeczywistej nie wszystkie działania są wykonalne, nie jest np. wykonalne wyciąganie pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych, a w konsekwencji nie każde równanie kwadratowe posiada pierwiastki rzeczywiste. Ażeby temu zapobiec, wprowadzamy liczby zespolone. Na razie jednak liczbami zespolonymi zajmować się nie będziemy. Używając wyrazu „liczba", mieć będziemy zawsze na myśli liczby rzeczywiste.

1.2. Zasada indukcji zupełnej. Spośród własności liczb naturalnych wymienimy jedną, na którą często będziemy się powoływać. Jest to *zasada indukcji zupełnej*. Orzeka ona, co następuje:

Niech dana będzie jakaś własność liczb naturalnych, która czyni zadość dwóm następującym warunkom:

(I) liczba 1 tę własność posiada,

(II) jeśli liczba n tę własność posiada, to również posiada ją liczba $n+1$.

Zasada indukcji orzeka, że przy tych założeniach każda liczba naturalna tę własność posiada.

Zasada ta odpowiada następującej elementarnej intuicji: skoro rozważaną własność posiada liczba 1, to na mocy warunku (II) posiada ją również liczba 2; skoro zaś liczba 2 ją posiada, to również na mocy warunku (II) posiada ją liczba 3; podobnie stąd wnosimy, że liczba 4 ją posiada, itd. Rzecz jasna, że do nieskończoności rozumować nie jesteśmy w stanie; zasada indukcji daje wyraz matematyczny naszej intuicji.

Jako przykład na zastosowanie zasady indukcji przytoczymy dowód tzw. *nierówności Bernoulliego* ([1]):

Dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby rzeczywistej $a \geqslant -1$ zachodzi wzór

$$(1+a)^n \geqslant 1+na. \tag{1}$$

Zauważmy tu ubocznie, że wyrażenie $x \geqslant y$ oznacza, że x jest większe lub równe y, czyli że x jest nie mniejsze niż y. Zarówno więc jest prawdą, że $3 \geqslant 2$, jak i że $3 \geqslant 3$.

Ażeby udowodnić nierówność Bernoulliego, należy w myśl zasady indukcji zupełnej wykazać:

([1]) J. Bernoulli, matematyk szwajcarski pierwszej połowy XVIII wieku (jeden z siedmiu wybitnych matematyków noszących to nazwisko).

(I) że do liczb n posiadających własność wyrażoną przez nierówność (1) należy liczba 1; jest to oczywiste, bo podstawiając w nierówności (1) liczbę 1 na miejsce n otrzymujemy nierówność $1+a \geqslant 1+a$, która zachodzi dla każdego a;

(II) że ze wzoru (1) wynika wzór, który z niego otrzymamy zastępując w nim n przez $n+1$, tj. wzór

$$(1') \qquad (1+a)^{n+1} \boxed{\geqslant} 1+(n+1)a.$$ QTN.

Ażeby to wykazać, pomnóżmy obie strony nierówności (1) przez $1+a$. Ponieważ z założenia mamy $1+a \geqslant 0$, przeto otrzymujemy

$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2.$$

Ponieważ zaś $na^2 \geqslant 0$, więc

$$1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a,$$

skąd wzór (1').

Jako drugi przykład na zastosowanie zasady indukcji podamy dowód następującej zależności trygonometrycznej:

$$(2) \qquad \frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt = \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)t}{2\sin \frac{1}{2}t}$$

spełnionej przez każdą liczbę całkowitą $n \geqslant 0$ i każdą liczbę rzeczywistą t nie będącą całkowitą wielokrotnością liczby 2π.

Indukcję rozpoczynamy w tym wypadku nie od 1, lecz od 0.

Dla $n = 0$ wzór (2) przekształca się w tożsamość

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}t}{2\sin \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}.$$

Pozostaje więc do udowodnienia, że ze wzoru (2) wynika wzór

$$(2') \qquad \frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos(n+1)t = \frac{\sin \frac{1}{2}(2(n+1)+1)t}{2\sin \frac{1}{2}t},$$

który z niego powstaje przez zastąpienie n przez $n+1$.

Opierając się na wzorze (2), możemy więc wzór (2') zapisać w postaci następującej:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)t}{2\sin \frac{1}{2}t}+\cos(n+1)t = \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+3)t}{2\sin \frac{1}{2}t},$$

czyli (sprowadzając do wspólnego mianownika)

$$\sin \tfrac{1}{2}(2n+3)t - \sin \tfrac{1}{2}(2n+1)t = 2\sin \tfrac{1}{2}t\cos(n+1)t.$$

Ponieważ ten ostatni wzór jest prawdziwy (jak wynika ze wzoru na różnicę sinusów), przeto udowodnione jest, że równość (2) pociąga za sobą (2'), a tym samym — w myśl zasady indukcji — że równość (2) zachodzi dla każdego $n \geqslant 0$.

1.3. Dwumian Newtona(¹). Określimy przede wszystkim tzw. *współczynniki Newtona* następującym wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}. \tag{3}$$

Jak widać, mianownik jest iloczynem k kolejnych liczb naturalnych od 1 do k, a licznik iloczynem k kolejnych malejących liczb od n do $n-k+1$. Zakładamy tu, że n i k są to liczby naturalne, przy czym $n \geqslant k$.

Sprawdzamy natychmiast, że $\binom{n}{1} = n$ oraz $\binom{n}{n} = 1$. Rozszerzamy definicję symbolu $\binom{n}{k}$ na wypadek, gdy $k = 0$, przyjmując, że $\binom{n}{0} = 1$; czynimy tak ze względu na technikę rachunkową.

Zauważmy wreszcie — choć z tego nie będziemy tu korzystać — że $\binom{n}{k}$ oznacza ilość kombinacji z n elementów po k.

Zachodzi następujący wzór (dla dowolnego k naturalnego):

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{4}$$

Istotnie,

$$\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot\ldots\cdot(k-1)k} + \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+2)}{1\cdot\ldots(k-1)}\cdot\frac{k}{k} =$$

$$= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1+k)}{1\cdot\ldots\cdot(k-1)k} = \binom{n+1}{k}.$$

Rozumowanie powyższe opierało się na wzorze (3), a więc wymagało założenia, że $k-1$ jest liczbą naturalną, tj. że $k>1$. W wypadku jednak, gdy $k=1$, wzór (4) sprawdzamy bezpośrednio, podstawiając $k=1$.

Udowodnimy obecnie *dwumian Newtona*, tj. następujący wzór:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n. \tag{5}$$

Jak widać, prawa strona jest sumą $n+1$ składników, pierwszym jest a^n, ostatnim b^n, bowiem $\binom{n}{n} = 1$. Wzór ten dla $n = 1$ jest oczywisty, dla $n=2$ i dla $n=3$ jest to wzór znany z kursu szkoły średniej.

Ponieważ wzór (5) zachodzi dla $n = 1$, należy w myśl zasady indukcji wykazać, opierając się na wzorze (5), że wzór, który z niego powstaje przez zastąpienie wykładnika n wykładnikiem $n+1$, jest prawdziwy. Otóż

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b,$$

(¹) Newton (1642-1727) — jeden z najznakomitszych uczonych, jakich ludzkość wydała. Jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego.

skąd wnosimy, że

$$(a+b)^{n+1} =$$
$$= a^{n+1}+\binom{n}{1}a^n b+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+\ldots+\binom{n}{n}ab^n+$$
$$+a^n b+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1} =$$
$$= a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^n b+\ldots+\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^n+b^{n+1},$$

przy czym stosujemy wzór (4). Równość, którą uzyskaliśmy, jest to właśnie równość, która powstaje ze wzoru (5) przez podstawienie $n+1$ na miejsce n. W ten sposób dwumian Newtona został udowodniony.

Zauważmy jeszcze, że dwumian Newtona daje się zapisać w sposób bardziej skondensowany, jak następuje (o ile $a \neq 0 \neq b$):

(6) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \text{ (1)}.$$

Symbol $\sum\limits_{k=0}^{n}$ oznacza, że należy utworzyć sumę $n+1$ składników, które powstają z wyrażenia następującego po tym symbolu przez podstawienie na miejsce k kolejno liczb całkowitych od 0 do n.

Wreszcie współczynniki Newtona zapisać można w sposób następujący. Oznaczmy symbolem $n!$ (czytamy: *n silnia*) iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n:

(7) $$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \quad \text{(przy czym niech } 0! = 1\text{)}.$$

Jak łatwo sprawdzić, mamy

(8) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.4*. Nierówność Schwarza. Posługując się indukcją zupełną, udowodnimy następującą nierówność:

(9) $$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2).$$

Dla $n = 1$ wzór (9) jest oczywisty:

$$(x_1y_1)^2 \leqslant x_1^2y_1^2.$$

Należy więc wzór ten udowodnić dla $n+1$, zakładając jego prawdziwość dla n.

---

(1) Gdy $a = 0$ lub $b = 0$, wzór (6) można stosować z tym jednak zastrzeżeniem, że symbol nieoznaczony 0^0 (który powstaje dla $k = n$, względnie dla $k = 0$) zastąpić należy przez 1.

Otóż

$$(10)\qquad (x_1y_1+\ldots+x_{n+1}y_{n+1})^2 = \\ = (x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2+2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)x_{n+1}y_{n+1}+x_{n+1}^2y_{n+1}^2.$$

Zarazem

$$2ab \leqslant a^2+b^2, \quad \text{bo} \quad a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geqslant 0,$$

więc kładąc $a = x_ky_{n+1}$ oraz $b = x_{n+1}y$ mamy

$$2x_ky_kx_{n+1}y_{n+1} \leqslant x_k^2y_{n+1}^2+x_{n+1}^2y_k^2$$

i sumując dla $k = 1, 2, \ldots, n$ otrzymujemy

$$2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)x_{n+1}y_{n+1} \leqslant (x_1^2+\ldots+x_n^2)y_{n+1}^2+(y_1^2+\ldots+y_n^2)x_{n+1}^2.$$

Na mocy (9) i (10) mamy więc

$$(x_1y_1+\ldots+x_{n+1}y_{n+1})^2 \leqslant \\ \leqslant (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)+(x_1^2+\ldots+x_n^2)y_{n+1}^2+ \\ +(y_1^2+\ldots+y_n^2)x_{n+1}^2+x_{n+1}^2y_{n+1}^2 = \\ = (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2)+(y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2)x_{n+1}^2 = \\ = (x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2)(y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2).$$

W rezultacie

$$(x_1y_1+\ldots+x_{n+1}y_{n+1})^2 \leqslant (x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2)(y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2).$$

Jest to właśnie wzór, który powstaje ze wzoru (9) przez podstawienie $n+1$ na miejsce n. Dowód jest tym samym zakończony.

1.5. Zasada ciągłości (Dedekinda[1]). Spośród własności zbioru liczb rzeczywistych wymienimy tzw. *zasadę ciągłości*. Orzeka ona, że jeśli zbiór wszystkich liczb rzeczywistych podzielimy na dwie części A i B w taki sposób, że każda liczba należąca do części A jest mniejsza od każdej liczby należącej do części B, to wówczas zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo w zbiorze A istnieje największa liczba, albo w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza (zakładamy przy tym, że żaden z tych dwóch zbiorów nie jest pusty). Inaczej mówiąc, jeśli linię prostą podzielimy na dwie części A i B w taki sposób, aby każdy punkt części A leżał na lewo od każdego punktu części B, to albo istnieje ostatni punkt w części A, albo pierwszy w B. Nie może wystąpić „luka" w tym „przekroju", którego dokonaliśmy. Na tym polega ciągłość zbioru liczb rzeczywistych

---

(1) R. Dedekind, matematyk niemiecki drugiej połowy XIX wieku.

w odróżnieniu od zbioru liczb wymiernych, gdzie tego rodzaju luki występują; jeśli np. podzielić zbiór liczb wymiernych na dwie części, zaliczając do pierwszej liczby mniejsze od $\sqrt{2}$, a do drugiej pozostałe, tj. liczby większe od $\sqrt{2}$, to jak widać, każda liczba pierwszej części jest mniejsza od każdej liczby części drugiej, ale nie istnieje liczba wymierna, która by była największa w pierwszej części lub najmniejsza w drugiej (co wynika z możliwości aproksymowania liczby niewymiernej $\sqrt{2}$ z dowolną dokładnością od dołu i od góry przez liczby wymierne, np. przez rozwinięcie dziesiętne).

1.6. Wartość bezwzględna. *Wartość bezwzględną* liczby a, tj. $|a|$, określamy przez warunki: jeśli $a \geqslant 0$, to $|a| = a$; jeśli $a < 0$, to $|a| = -a$. Zachodzą następujące wzory, znane z matematyki elementarnej, których dowód pozostawiamy czytelnikowi:

(11) $$|a| = |-a|,$$

(12) $$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$

(13) $$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

(14) $$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|,$$

(15) $$|ab| = |a|\,|b|,$$

(16) *z nierówności* $|a| \leqslant c$ *i* $|b| \leqslant d$ *wynika* $|a+b| \leqslant c+d$.

Jest to wzór na dodawanie nierówności „pod znakiem wartości bezwzględnej", który często będziemy stosować. Wynika on ze wzoru (13), ponieważ

$$|a+b| \leqslant |a|+|b| \leqslant c+d.$$

Wzór ten pozostaje w mocy, jeśli zastąpić znak $\leqslant$ przez $<$.

Zauważmy wreszcie, że

(17) *nierówność* $|a| < b$ *jest równoważna podwójnej nierówności* $-b < a < b$, *a więc zespołowi dwóch nierówności:* $a < b$ *i* $-a < b$.

1.7. Zbiory ograniczone. Kres górny i dolny zbioru. Mówimy, że zbiór liczb rzeczywistych Z jest *ograniczony*, jeśli istnieją takie dwie liczby m i M, że każda liczba x należąca do zbioru Z czyni zadość podwójnej nierówności $m \leqslant x \leqslant M$. Jeśli założyć tylko, że istnieje liczba M, spełniająca nierówność $M \geqslant x$ dla każdego x, należącego do zbioru Z, to mówimy, że zbiór Z jest *ograniczony z góry*. Podobnie, zbiór Z jest *ograniczony z dołu*, jeśli istnieje liczba m, czyniąca zadość wyżej sformułowanemu warunkowi: $m \leqslant x$.

Geometryczny sens tych pojęć jest następujący. Zbiór jest ograniczony, to znaczy że mieści się on w pewnym odcinku prostej liczbowej.

Zbiór jest ograniczony z góry, względnie z dołu, gdy mieści się w promieniu nieskończonym skierowanym w lewo, względnie w prawo.

Posługując się zasadą ciągłości, udowodnimy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. *Jeśli zbiór (niepusty) Z jest ograniczony z góry, to wśród liczb M, czyniących zadość nierówności $M \geqslant x$ dla każdego x, należącego do Z, istnieje liczba najmniejsza. Liczbę tę nazywać będziemy kresem górnym zbioru Z.*

Podobnie, *jeśli zbiór Z jest ograniczony z dołu, to wśród liczb m, czyniących zadość nierówności $m \leqslant x$, istnieje liczba największa, zwana kresem dolnym zbioru Z.*

Dowód. Niech zbiór Z będzie ograniczony z góry. Podzielmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych na dwie klasy, zaliczając do drugiej wszystkie liczby M, czyniące zadość nierówności $M \geqslant x$ dla każdego x należącego do Z. Do klasy pierwszej zaliczamy wszystkie pozostałe liczby rzeczywiste; znaczy to, że do pierwszej klasy należy liczba a, gdy istnieje w zbiorze Z liczba od niej większa. Tak określony podział zbioru liczb rzeczywistych na dwie klasy jest przekrojem, tzn. że każda liczba należąca do pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby należącej do drugiej klasy. Istotnie, gdyby przypuścić, że jakaś liczba M klasy drugiej jest mniejsza od jakiejś liczby a klasy pierwszej, to ponieważ istnieje w zbiorze Z taka liczba x, że $a < x$, więc mielibyśmy $M < x$, co jednak przeczy definicji klasy drugiej.

Zauważmy ponadto, że żadna z tych dwóch klas nie jest pusta. Jeśli bowiem jakaś liczba z należy do zbioru Z (a taka liczba istnieje, bo z założenia zbiór Z nie jest pusty), to liczba $z-1$ należy do klasy pierwszej. Klasa druga też nie jest pusta, bo zbiór Z jest ograniczony z góry.

Na mocy zasady ciągłości istnieje więc bądź największa liczba w klasie pierwszej, bądź najmniejsza w drugiej. Pierwsza ewentualność jednak zachodzić nie może; jeśli bowiem a należy do klasy pierwszej i $a < x$ (gdzie x należy do Z), to oznaczając przez a' jakąkolwiek liczbę pośrednią między a i x, np. $a' = \frac{1}{2}(a+x)$, mamy również $a' < x$, co świadczy o tym, że a' również należy do klasy pierwszej; do każdej liczby a klasy pierwszej możemy więc znaleźć w tej klasie większą od niej liczbę a'. Znaczy to, że w klasie pierwszej nie ma liczby największej. Istnieje więc w klasie drugiej liczba najmniejsza, tzn. najmniejsza wśród liczb M, spełniających nierówność $M \geqslant x$ dla każdego x, należącego do zbioru Z, c.b.d.o.

Dowód istnienia kresu dolnego jest zupełnie analogiczny.

Zauważmy, że kresy górny i dolny zbioru Z nie muszą do tego zbioru należeć. Na przykład kresami przedziału otwartego [1] $a < x < b$ są liczby a i b, które do tego przedziału nie należą.

---

[1] *Przedziałem otwartym* nazywamy zbiór takich liczb x, że $a < x < b$; *przedziałem domkniętym* — przedział otwarty wraz z końcami, tj. zbiór liczb x, takich że $a \leqslant x \leqslant b$.

1.8*. Aksjomatyka liczb rzeczywistych. Pojęcie liczby rzeczywistej — które przyjęliśmy jako znane z kursu szkoły średniej — wprowadzić można w sposób aksjomatyczny, jak następuje.

Zakładamy, że w obrębie liczb rzeczywistych wykonalne są dwa działania: *dodawanie* $x+y$ i *mnożenie* xy. Działania te spełniają prawa *przemienności* i *łączności*:

$$x+y = y+x, \qquad xy = yx,$$

$$(x+y)+z = x+(y+z), \qquad (xy)z = x(yz).$$

Ponadto mnożenie jest *rozdzielne* względem dodawania:

$$x(y+z) = xy+xz.$$

Dwie (różne) liczby 0 i 1 stanowią *moduły* dodawania i mnożenia, tj.

$$x+0 = x, \qquad x\cdot 1 = x.$$

Zakładamy dalej, że w obrębie liczb rzeczywistych wykonalne jest zawsze *odejmowanie* i *dzielenie*, z wyjątkiem dzielenia przez 0. Inaczej mówiąc, zakładamy, że dla każdej pary liczb x i y istnieje taka liczba z (zwana *różnicą* $x-y$), że

$$x = y+z,$$

oraz — w wypadku, gdy $y \neq 0$ — taka liczba w (zwana *ilorazem* $x:y$), że

$$x = yw.$$

Prócz powyższych aksjomatów, dotyczących działań, przyjmujemy aksjomaty następujące, dotyczące stosunku *mniejszości*: $x<y$. Zakładamy, że każde dwie różne liczby rzeczywiste x i y związane są tym stosunkiem w jednym lub drugim kierunku, tj. że $x<y$ lub $y<x$. Stosunek ten jest *przechodni*, tj.

warunki $x<y$ *i* $y<z$ *pociągają za sobą* $x<z$,

oraz *asymetryczny*, tzn.

jeśli $x<y$, *to nie zachodzi stosunek* $y<x$.

Stosunek mniejszości związany jest następującymi zależnościami z działaniami:

jeśli $y<z$, *to* $x+y<x+z$, *i jeśli ponadto* $0<x$, *to* $xy<xz$.

Ostatnim wreszcie aksjomatem teorii liczb rzeczywistych, który przyjmujemy, jest *zasada ciągłości Dedekinda*, sformułowana w § 1.5.

Wszystkie twierdzenia arytmetyczne i algebraiczne z kursu szkoły średniej dają się wyprowadzić z powyższych aksjomatów.

1.9*. Liczby rzeczywiste jako zbiory liczb wymiernych[1]. Pojęcie liczby rzeczywistej można określić na gruncie teorii liczb wymiernych w sposób następujący:

Liczby rzeczywiste uważać można za identyczne ze zbiorami liczb wymiernych R, spełniających następujące warunki:

(I) zbiór R nie zawiera liczby największej, tzn. dla każdej liczby należącej do zbioru R istnieje w R liczba od niej większa,

(II) jeśli liczba x należy do R, to również każda liczba wymierna mniejsza od x należy do R,

(III) zbiór R nie jest pusty, a przy tym nie jest identyczny ze zbiorem wszystkich liczb wymiernych.

Dla tak zdefiniowanych liczb rzeczywistych określamy przede wszystkim stosunek mniejszości. Mianowicie piszemy $R < R'$, jeśli zbiór R jest częścią zbioru R' (różną od R'); lub — co na jedno wychodzi — jeśli zbiór R' zawiera liczby, które do R nie należą (jak łatwo sprawdzić z dwóch zbiorów, spełniających warunki (I)-(III), zawsze jeden jest w drugim zawarty).

Konstatujemy z łatwością, że określony w taki sposób stosunek mniejszości spełnia aksjomaty podane w § 1.8, tzn. jest to stosunek przechodni, asymetryczny i zachodzący dla każdej pary różnych zbiorów R i R' w jednym lub drugim kierunku.

Z kolei określamy dodawanie liczb rzeczywistych, tj. dodawanie zbiorów R i R' (czyniących zadość warunkom (I)-(III)). Mianowicie, przez $R+R'$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb, które stanowią sumę dwóch liczb, z których pierwsza należy do R, a druga do R'. Łatwo sprawdzić, że zbiór $R+R'$ spełnia warunki (I)-(III). Ponadto spełnione są aksjomaty dotyczące dodawania, jak przemienność, łączność itd. Liczbą rzeczywistą 0 jest zbiór wszystkich liczb wymiernych ujemnych. Podobnie, liczbą rzeczywistą 1 jest zbiór wszystkich liczb wymiernych mniejszych od jedynki wymiernej. Ogólnie, jeśli r jest liczbą wymierną, to przez „liczbę rzeczywistą r" rozumiemy zbiór wszystkich liczb wymiernych ,mniejszych od liczby r wymiernej (w praktyce liczbę wymierną r i liczbę rzeczywistą r identyfikujemy). — R jest zbiorem wszystkich liczb wymiernych postaci $-x$, gdzie x przebiega zbiór wszystkich liczb nie należących do R; jeśli jednak zbiór ten zawiera najmniejszą liczbę r, to liczby $-r$ do zbioru $-R$ nie zaliczamy (jest to wypadek, gdy R jest „liczbą rzeczywistą r"). Dowodzi się, że $R+(-R) = 0$.

Mnożenie liczb rzeczywistych określa się w następujący sposób: jeśli $R \geqslant 0$ i $R' \geqslant 0$, to RR' jest zbiorem złożonym ze wszystkich liczb wy-

[1] Podajemy tu szkic tzw. *teorii Dedekinda liczb rzeczywistych*.

miernych ujemnych oraz z liczb postaci rr', gdzie r jest liczbą nieujemną należącą do R i podobnie r' jest liczbą nieujemną należącą do R'. Ponadto przyjmujemy, że

$$(-R)(-R') = RR', \quad (-R)R' = -(RR') = R(-R').$$

Dowodzi się, że wszystkie aksjomaty dotyczące mnożenia są spełnione.

Wreszcie aksjomat ciągłości jest spełniony. Niech bowiem A, B oznacza przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych. Oznaczmy przez R zbiór liczb wymiernych o tej własności, że r należy do R wtedy i tylko wtedy, gdy należy do którejś z liczb rzeczywistych, należących do klasy A.

Dowodzi się, że tak określony zbiór R spełnia warunki (I)-(III), czyli że stanowi liczbę rzeczywistą. Następnie dowodzi się, że R „leży na przekroju A, B", tj. że jest bądź największą liczbą w klasie A, bądź najmniejszą w klasie B.

W ten sposób widzimy, że wszystkie aksjomaty teorii liczb rzeczywistych sformułowane w § 1.8 są spełnione, gdy przez liczbę rzeczywistą rozumiemy zbiór liczb wymiernych, czyniący zadość warunkom (I)-(III).

Dodajmy, że zbiór wszystkich liczb wymiernych spełnia wszystkie te aksjomaty prócz jednego, mianowicie prócz aksjomatu ciągłości.

Wynika stąd, że aksjomat ciągłości jest niezależny od pozostałych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych. Gdyby bowiem był ich konsekwencją (a więc twierdzeniem, a nie aksjomatem), to byłby spełniony w każdym systemie, w którym te aksjomaty są spełnione.

Zadania

1. Udowodnić, że dla każdego naturalnego n i każdego rzeczywistego $a > -1$ zachodzi następujący wzór (stanowiący uogólnienie nierówności (1) Bernoulliego):

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3.$$

Wskazówka. Dowód przez indukcję zupełną.

2. Udowodnić tożsamości

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Wskazówka. W dowodzie drugiej równości oprzeć się można na tożsamości

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

3. Analogicznie: znaleźć wzór na sumę $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

4. Wyprowadzić wzory

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n, \qquad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots\pm\binom{n}{n} = 0.$$

Wskazówka. Oprzeć się na dwumianie Newtona.

5. Opierając się na zasadzie ciągłości dowieść, że istnieje $\sqrt[n]{a}$ dla każdego naturalnego n i dodatniego a.

6. Dowieść, że

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|.$$

Dowieść, że równość $|a+b| = |a|+|b|$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geqslant 0$.

7. Oznaczmy przez A *średnią arytmetyczną*, a przez G *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tj.

$$A = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Dowieść, że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, to $G \leqslant A$.

Wskazówka. Dowód poprzedzić uwagą, że jeśli $a_1 < A < a_2$, to średnią arytmetyczną liczb A, a_1+a_2-A, $a_3, a_4, \ldots, a_n$ jest A, a średnia geometryczna tych liczb jest większa od G.

8. Oznaczając przez H *średnią harmoniczną* rozważanych poprzednio liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tj. kładąc

$$H = n : \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right),$$

dowieść, że $H \leqslant G$.

§ 2. Ciągi nieskończone

2.1. Definicje i przykłady. Jeżeli każdej liczbie naturalnej przyporządkowana została jakaś liczba rzeczywista, to mówimy, że został określony *ciąg nieskończony*.

Na przykład liczby parzyste dodatnie tworzą ciąg nieskończony $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$; mianowicie liczbie 1 przyporządkowana jest liczba 2, liczbie 2 liczba 4, liczbie 3 liczba 6, ogólnie liczbie naturalnej n odpowiada liczba $2n$.

Zazwyczaj ciąg nieskończony zapisujemy w postaci $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ lub $\{a_n\}$. Liczby występujące w ciągu nazywamy *wyrazami* ciągu; wyrażenie a_n nazywamy *wyrazem ogólnym* ciągu. A więc dla ciągu liczb dodatnich parzystych wyrazem ogólnym jest $2n$, dla ciągu liczb nieparzystych jest $2n-1$.

W ciągu nieskończonym niektóre wyrazy mogą się powtarzać. Jeśli np. liczbom naturalnym nieparzystym przyporządkujemy liczbę 0, a parzystym liczbę 1, to otrzymamy ciąg nieskończony $0, 1, 0, 1, \ldots$ o dwóch na przemian występujących wyrazach.

W szczególności w ciągu mogą być wszystkie wyrazy identyczne: $c, c, c, \ldots$

Jako przykłady ciągów wymienimy postępy arytmetyczne i geometryczne. Postęp arytmetyczny jest to ciąg postaci c, $c+d$, $c+2d, \ldots$, tj. ciąg o wyrazie ogólnym $c+(n-1)d$. Podobnie wyrazem ogólnym postępu geometrycznego jest $a_n = cq^{n-1}$.

Często używaną postacią definicji jest *definicja przez indukcję* (czyli definicja *rekurencyjna*). Polega ona na tym, że definiujemy bezpośrednio wyraz a_1, natomiast a_n określamy za pomocą wyrazów wcześniejszych. Połóżmy np. $a_1 = 1$ oraz $a_n = 2^{a_{n-1}}$. Pierwszymi wyrazami tego ciągu są $1, 2, 4, 16, 2^{16}, \ldots$

Zauważmy wreszcie, że nie zawsze jest rzeczą możliwą zapisać wyraz ogólny w postaci wzoru. Na przykład liczby pierwsze tworzą, jak wiadomo z algebry, ciąg nieskończony, nie znamy jednak wzoru matematycznego, który by określał n-tą liczbę pierwszą.

Geometrycznie interpretujemy ciąg nieskończony jako pewien zbiór położony na płaszczyźnie, na której dane są osie odciętych i rzędnych (patrz rys. 1, str. 21). Mianowicie ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jest to zbiór punktów $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$ Na przykład ciąg liczb naturalnych jest to przecięcie prostej $y = x$ z wiązką prostych równoległych do osi Y i przechodzących przez punkty naturalne osi X. Podobnie ciąg o wyrazie stałym c jest to przecięcie tej wiązki z prostą równoległą do osi X. Biorąc na prostych tej wiązki na przemian punkty o rzędnej 0 lub 1, otrzymujemy ciąg oscylujący $0, 1, 0, 1, \ldots$

Jak z powyższego widać, ciąg nieskończony i zbiór wyrazów tego ciągu są to pojęcia różne: ciąg jest zbiorem punktów płaszczyzny, a zbiór wyrazów ciągu jest pewnym zbiorem liczb rzeczywistych, tj. z punktu widzenia geometrycznego zbiorem położonym na prostej. Dwa różne ciągi mogą się składać z tych samych wyrazów: wspomniany już ciąg oscylujący $0, 1, 0, 1, \ldots$ i ciąg $0, 1, 1, 1, \ldots$ (mający na pierwszym miejscu 0, a następnie same 1) mają te same wyrazy, choć są to ciągi różne o zasadniczo różnych własnościach.

Ciąg nazywamy *rosnącym*, jeśli $a_1 < a_2 < \ldots$, ogólnie: jeśli $a_n < a_{n+1}$. Podobnie ciąg nazywamy *malejącym*, jeśli $a_n > a_{n+1}$. Jeśli znak $<$ zastąpimy przez $\leqslant$ (względnie $>$ przez $\geqslant$), otrzymujemy ciągi rosnące (względnie malejące) w szerszym sensie, zwane też ciągami *niemalejącymi* (względnie *nierosnącymi*). Ciągi rosnące i ciągi malejące w szerszym sensie obejmujemy ogólną nazwą ciągów *monotonicznych*.

Ciąg liczb parzystych jest ciągiem rosnącym, ciąg $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ jest ciągiem rosnącym w szerszym sensie. Ciąg oscylujący $0, 1, 0, 1, \ldots$ nie jest ani rosnący, ani malejący.

2.2. Pojęcie granicy. Liczbę g nazywamy *granicą* ciągu nieskończonego $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, jeżeli do każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność

$$(1) \qquad |a_n - g| < \varepsilon\,,$$

tj. a_n mieści się między $g-\varepsilon$ a $g+\varepsilon$.

Granicę ciągu oznaczamy symbolem

(2) $$g = \lim_{n=\infty} a_n .$$

Jako przykład ciągu mającego granicę weźmy pod uwagę ciąg o ogólnym wyrazie $a_n = (n+1)/n$, tj. ciąg $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, \ldots$ Udowodnimy, że 1 jest granicą tego ciągu.

Niech więc dana będzie jakaś liczba $\varepsilon > 0$. Należy tak dobrać k, aby dla $n > k$ zachodziła nierówność

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{czyli aby} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Otóż niech k będzie liczbą naturalną większą niż $1/\varepsilon$. Mamy więc $1/k < \varepsilon$, a zatem dla $n > k$ zachodzi podwójna nierówność

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

co było do okazania.

Zauważmy, że jednocześnie udowodniliśmy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Liczba k, którą dobieramy do ε, zależy od ε. Na ogół, jeżeli ε zmniejszamy, to k powinniśmy powiększyć (łatwo to zaobserwować na przykładzie poprzednim).

Wyrażając się bardziej obrazowo, warunek na to, aby liczba g była granicą ciągu $a_1, a_2, \ldots$, można sformułować jak następuje: dla każdego $\varepsilon > 0$ nierówność (1) jest spełniona, o ile tylko n jest d o s t a t e c z n i e d u ż e.

Ciąg posiadający granicę nazywamy *zbieżnym*. Ciąg *rozbieżny* jest to ciąg, który granicy nie posiada. Jako przykład ciągu rozbieżnego weźmy pod uwagę ciąg wszystkich liczb naturalnych. Istotnie, przypuśćmy, że g jest granicą ciągu liczb naturalnych. Podstawmy z ε wartość 1. Na mocy (1) mamy więc dla dostatecznie dużych n nierówność $|n-g| < 1$ a zatem $n < g+1$. Dochodzimy do sprzeczności. Jest bowiem przeciwnie: dla dostatecznie dużych n mamy $n > g+1$. Sprzeczność ta wykazuje, iż przypuszczenie nasze, że ciąg liczb naturalnych posiada granicę, było błędne. Jest to więc ciąg rozbieżny.

Podobnie można by wykazać, że ciąg oscylujący $0, 1, 0, 1, \ldots$ jest rozbieżny.

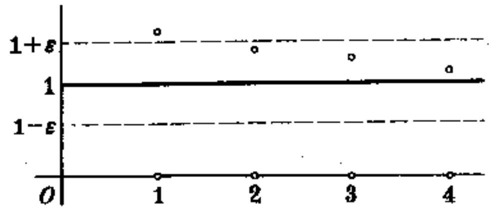
Dalej,

(3) $$\lim_{n=\infty} c = c,$$

tj. ciąg o stałym wyrazie c ma jako granicę c.

Mamy bowiem stale $a_n - c = 0$. Nierówność (1) zachodzi więc dla w s z y s t k i c h n.

Geometrycznie pojęcie granicy interpretować można w sposób następujący. Niech dany będzie ciąg $a_1, a_2, \ldots$ (np. ciąg o ogólnym wyrazie $(n+1)/n$). Wyobraźmy sobie, stosownie do § 2.1, jego interpretację geometryczną na płaszczyźnie (rys. 1). Poprowadźmy przez punkt g osi Y (np. $g = 1$) prostą równoległą do osi X. Poprowadźmy jeszcze jedną równoległą nad tą prostą i jedną pod nią w tej samej od prostej odległości. Warunek na to, aby zachodziła równość (2), orzeka, że dla dostatecznie dużych n (tj. dla n większych od pewnego k) wszystkie elementy naszego ciągu mieszczą się w pasie wyznaczonym przez te dwie równoległe.



Rys. 1

Przejście od warunku analitycznego, sformułowanego w definicji granicy, do powyższego warunku geometrycznego uzyskamy z łatwością, oznaczając przez 2ε szerokość rozważanego pasa.

Inaczej jeszcze mówiąc, warunek na zbieżność ciągu do g daje się sformułować jak następuje: każdy przedział o środku g zawiera wszystkie wyrazy ciągu, poczynając od pewnego wskaźnika.

Na rozpatrywanych poprzednio przykładach widzieliśmy, że ciąg może nie posiadać granicy (jeśli jest rozbieżny); nasuwa się pytanie, czy jeśli granicę posiada (a zatem, jeśli jest zbieżny), to czy posiada tylko jedną granicę? Okażemy, że tak jest istotnie.

Przypuśćmy bowiem, że ciąg $a_1, a_2, \ldots$ posiada dwie różne granice g i g'. Mamy więc $|g-g'| > 0$. Niech $\varepsilon = \frac{1}{2}|g-g'|$. Na mocy definicji granicy istnieją dwie takie liczby k i k', że dla $n > k$ zachodzi nierówność

$$(4) \qquad |a_n - g| < \varepsilon,$$

a dla $n > k'$ nierówność

$$(5) \qquad |a_n - g'| < \varepsilon.$$

A zatem, jeśli przez m oznaczymy większą z dwóch liczb k i k', to dla $n > m$ spełnione są obie nierówności (4) i (5) równocześnie. Dodajmy je stronami pod znakiem bezwzględnej wartości (por. (16), § 1.6), zmieniwszy uprzednio znak pod bezwzględną wartością we wzorze (4). Otrzymamy $|g-g'| < 2\varepsilon$, lecz $2\varepsilon = |g-g'|$. Doszliśmy więc do sprzeczności.

Uwaga. Jak łatwo dowieść, pojęcie granicy nie ulegnie zmianie, jeżeli w jej definicji zastąpimy znak $>$ przez $\geqslant$ lub $<$ przez $\leqslant$.

2.3. Ciągi ograniczone. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli zbiór jego wyrazów jest ograniczony, tzn. jeśli istnieje taka liczba M, że nierówność $|a_n| < M$ spełniona jest dla wszystkich wartości n. Inaczej mówiąc, nierówność $-M < a_n < M$ spełniona jest przez wszystkie wyrazy ciągu.

W interpretacji geometrycznej warunek ten oznacza, że cały ciąg ten (traktowany jako pewien zbiór położony na płaszczyźnie) mieści się pomiędzy dwiema prostymi $y = M$ i $y = -M$.

Mówimy też, że dany ciąg jest *ograniczony z góry*, jeśli istnieje taka liczba M, że stale mamy $a_n < M$, tj. że ciąg ten znajduje się poniżej prostej $y = M$. Analogicznie określa się pojęcie ciągu ograniczonego z dołu. Rzecz jasna, że ciąg ograniczony z góry i z dołu, to po prostu ciąg ograniczony.

PRZYKŁADY. Ciąg $0, 1, 0, 1, \ldots$ jest ograniczony. Ciąg liczb naturalnych jest nieograniczony z góry, jest jednak ograniczony z dołu. Ciąg $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ nie jest ograniczony ani z dołu, ani z góry.

TWIERDZENIE. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Istotnie, załóżmy, że zachodzi równość (2) i podstawmy za ε wartość 1. Istnieje więc takie k, że dla $n > k$ mamy $|a_n - g| < 1$. Ponieważ $|a_n| - |g| \leqslant |a_n - g|$ (por. (14) § 1.6), przeto $|a_n| < |g| + 1$. Oznaczmy przez M liczbę większą od każdej spośród następujących $k+1$ liczb: $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|, |g|+1$. Ponieważ ta ostatnia jest większa od $|a_{k+1}|$, $|a_{k+2}|$ itd., przeto $M > |a_n|$ dla każdego n. Ciąg jest więc ograniczony.

2.4. Działania na ciągach.

TWIERDZENIE. *Przy założeniu, że ciągi $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$ są zbieżne, zachodzą cztery następujące wzory* [1]:

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n, \tag{6}$$

$$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n, \tag{7}$$

$$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n, \tag{8}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad (\textit{o ile } \lim b_n \neq 0). \tag{9}$$

Znaczy to, że przy naszych założeniach istnieje granica sumy i równa się sumie granic, istnieje granica różnicy i równa się różnicy granic itp.

Dowód. Połóżmy $\lim a_n = g$ i $\lim b_n = h$. Niech dana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie k, że dla $n > k$ zachodzą nierówności

$$|a_n - g| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{oraz} \quad |b_n - h| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

---

[1] Dla uproszczenia symboliki opuszczać często będziemy pod znakiem lim równość $n = \infty$.

Dodajmy do siebie te dwie nierówności pod znakiem bezwzględnej wartości. Otrzymamy

$$|(a_n+b_n)-(g+h)| < \varepsilon.$$

Znaczy to, że ciąg, którego ogólnym wyrazem jest $c_n = a_n+b_n$, jest zbieżny do granicy $g+h$. Udowodniliśmy więc wzór (6).

W szczególności, jeśli b_n ma wartość stałą: $b_n = c$, otrzymujemy ze wzoru (6) i (3):

$$\lim(a_n+c) = c+\lim a_n. \tag{10}$$

Udowodnimy obecnie wzór (8). Należy więc „oszacować" różnicę $|a_n b_n - gh|$. Aby móc korzystać ze zbieżności ciągów $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$, przekształcimy tę różnicę, jak następuje:

$$a_n b_n - gh = a_n b_n - a_n h + a_n h - gh = a_n(b_n-h)+h(a_n-g).$$

Ponieważ ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest ograniczony jako ciąg zbieżny, przeto istnieje takie M, że $|a_n| < M$. Stosując do poprzedniej równości wzory na bezwzględną wartość sumy i iloczynu, otrzymujemy

$$|a_n b_n - gh| \leqslant |a_n(b_n-h)|+|h(a_n-g)| \leqslant M|b_n-h|+|h||a_n-g|.$$

Weźmy teraz pod uwagę, niezależnie od liczby ε, jakąś liczbę $\eta > 0$. Istnieje więc takie k, że dla $n > k$ mamy $|a_n-g| < \eta$ oraz $|b_n-h| < \eta$. A zatem

$$|a_n b_n - gh| < M\eta+|h|\eta = (M+|h|)\eta.$$

O liczbie dodatniej η dotychczas nic nie zakładaliśmy. Załóżmy obecnie, że $\eta = \varepsilon/(M+|h|)$. Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że dla $n > k$ zachodzi nierówność $|a_n b_n - gh| < \varepsilon$. A zatem udowodniliśmy wzór (8).

W szczególności, kładąc $b_n = c$, otrzymujemy stąd:

$$\lim(ca_n) = c\lim a_n, \tag{11}$$

$$\lim(-a_n) = -\lim a_n, \tag{12}$$

przy czym wzór (12) wynika z (11) przez podstawienie $c = -1$.

Wzory (6) i (12) pociągają wzór (7). Mamy bowiem

$$\lim(a_n-b_n) = \lim\big(a_n+(-b_n)\big) = \lim a_n+\lim(-b_n) = \\ = \lim a_n - \lim b_n.$$

Nim przejdziemy do dowodu wzoru (9), udowodnimy szczególny jego następujący przypadek:

$$\lim\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n} \quad (\text{o ile } \lim b_n \neq 0). \tag{13}$$

Zauważmy najpierw, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $b_n \neq 0$. Udowodnimy nawet przesłankę mocniejszą: dla dostatecznie dużych n mamy $|b_n| > |h|/2$. Istotnie, ponieważ $|h|/2 > 0$, istnieje takie k, że dla $n > k$ jest $|b_n - h| < |h|/2$. Stąd

$$|h| - |b_n| \leqslant |h - b_n| < |h|/2, \quad \text{a zatem} \quad |b_n| > |h|/2.$$

Aby udowodnić wzór (13), należy oszacować różnicę

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| = \left|\frac{h - b_n}{hb_n}\right| = \frac{|h - b_n|}{|h| \cdot |b_n|}.$$

Otóż dla dostatecznie dużych n mamy

$$|h - b_n| < \eta \quad \text{oraz} \quad |b_n| > |h|/2, \quad \text{tj.} \quad 1/|b_n| < 2/|h|.$$

A zatem

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \frac{2\eta}{h^2}.$$

Przyjmując, że $\eta = \frac{1}{2}\varepsilon h^2$, otrzymujemy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \varepsilon,$$

skąd wynika wzór (13).

Wzór (9) wynika z (8) i (13):

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

Uwaga 1. Zakładaliśmy, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne. Założenie to jest istotne; może się bowiem zdarzyć, że ciąg $\{a_n + b_n\}$ jest zbieżny, mimo że oba ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są rozbieżne; nie można więc wówczas stosować wzoru (6). Jako przykład może służyć: $a_n = n$, $b_n = -n$.

Jeśli jednak ciąg $\{a_n + b_n\}$ i jeden z dwóch ciągów, np. ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, to i drugi ciąg jest zbieżny. Bowiem $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, a więc ciąg $\{b_n\}$ jako różnica dwóch ciągów zbieżnych jest zbieżny.

Analogiczne uwagi stosują się do wzorów (7)-(9).

Uwaga 2. W definicji ciągu zakładaliśmy, że numeracja elementów zaczyna się od liczby 1. Dogodnie jest tę definicję uogólnić, przyjmując, że numeracja zaczyna się od dowolnej liczby naturalnej (a nawet od dowolnej liczby całkowitej), np. od 2, 3 czy innej liczby naturalnej. Tak jest np. w dowodzie wzoru (13). Udowodniliśmy, że $b_n \neq 0$, poczynając od pewnego k. Ciąg $1/b_n$ jest więc określony dopiero poczynając od tego k (jeśli bowiem $b_n = 0$, to $1/b_n$ żadnej liczby nie oznacza).

Uwaga ta pozostaje w związku z następującą własnością ciągów, łatwą do udowodnienia: *zmiana skończonej ilości wyrazów ciągu nie ma wpływu ani na zbieżność ciągu, ani na jego granicę*. To samo dotyczy *dołączenia* do ciągu, względnie *odrzucenia* z ciągu skończonej ilości wyrazów.

PRZYKŁADY. Znaleźć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{7n-3}.$$

Nie możemy tu wprost zastosować wzoru (9), ponieważ ani licznik, ani mianownik nie jest zbieżny, gdy n dąży do ∞. Możemy jednak wyraz ogólny ciągu

$$a_n=\frac{6n+2}{7n-3}$$

tak przekształcić, aby stał się on ilorazem dwóch wyrażeń, posiadających granice. Wystarczy w tym celu podzielić licznik i mianownik przez n. Otrzymamy

$$a_n=\frac{6+\frac{2}{n}}{7-\frac{3}{n}}$$

i stosujemy wzór (9). Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right)=6 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{3}{n}\right)=7,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\tfrac{6}{7}.$$

Podobnie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=0,$$

bo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}.$$

2.5. Dalsze własności rachunkowe granicy. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie zbieżny. Wówczas zbieżny jest ciąg $\{|a_n|\}$ i

(14) $$\lim|a_n|=|\lim a_n|.$$

Niech bowiem $\lim a_n=g$. Mamy więc $|a_n-g|<\varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. A zatem

$$|a_n|-|g|\leqslant|a_n-g|<\varepsilon \quad \text{oraz} \quad |g|-|a_n|\leqslant|g-a_n|<\varepsilon,$$

skąd (por. (17), § 1.6): $\big||a_n|-|g|\big|<\varepsilon$. Wzór (14) jest więc udowodniony.

Przy założeniu, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, zachodzi zależność następująca:

(15) *nierówność* $a_n\leqslant b_n$ *pociąga za sobą* $\lim a_n\leqslant\lim b_n$.

W szczególności, jeśli ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny, to

(16) *warunek* $c_n \geqslant 0$ *pociąga za sobą* $\lim c_n \geqslant 0$.

Udowodnimy najpierw ostatni wzór. Niech więc $\lim c_n = h$. Przypuśćmy, że $h < 0$ tj. że $-h > 0$. Mamy więc dla dostatecznie dużych n $|c_n - h| < -h$ a zatem $c_n - h < -h$ skąd $c_n < 0$, wbrew założeniu.

Opierając się na wzorze (16) udowodnimy obecnie wzór (15).

Połóżmy $b_n - a_n = c_n$. Ponieważ $a_n \leqslant b_n$, przeto $c_n \geqslant 0$, a więc w granicy $\lim c_n \geqslant 0$. Zarazem na mocy (7):

$$\lim c_n = \lim b_n - \lim a_n,$$

a zatem

$$\lim b_n - \lim a_n \geqslant 0 \quad \text{czyli} \quad \lim a_n \leqslant \lim b_n.$$

Uwaga. W sformułowaniu zależności (16) nie można zastąpić nierówności $\geqslant$ przez $>$ (podobnie w (15) nie można zastąpić $\leqslant$ przez $<$). Na przykład ciąg $c_n = 1/n$ spełnia nierówność $c_n > 0$, a $\lim c_n = 0$.

Widzimy więc, że stosunek $\leqslant$ i $\geqslant$ „przechodzi do granicy" natomiast stosunki $<$ i $>$ tej własności nie mają.

Wzór na podwójną nierówność:

(17) *Jeśli* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ *i* $\lim a_n = \lim b_n$, *to ciąg* $\{c_n\}$ *jest zbieżny, przy czym* $\lim c_n = \lim a_n = \lim b_n$.

Niech bowiem $\lim a_n = g = \lim b_n$ i niech $\varepsilon > 0$. Mamy więc dla dostatecznie dużych n

$$|a_n - g| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |b_n - g| < \varepsilon.$$

Na mocy założenia

$$a_n - g \leqslant c_n - g \leqslant b_n - g, \quad \text{a} \quad -\varepsilon < a_n - g \quad \text{i} \quad b_n - g < \varepsilon,$$

zatem

$$-\varepsilon < c_n - g < \varepsilon \quad \text{tj.} \quad |c_n - g| < \varepsilon,$$

skąd $\lim c_n = g$.

(18) *Jeśli* $\lim |a_n| = 0$, *to ciąg* $\{a_n\}$ *jest zbieżny i* $\lim a_n = 0$.

Bo

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n| \quad \text{i} \quad \lim(-|a_n|) = 0 = \lim |a_n|.$$

2.6. Podciągi. Niech dany będzie ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ oraz ciąg rosnący liczb naturalnych $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ Ciąg

$$b_1 = a_{m_1}, \quad b_2 = a_{m_2}, \quad \ldots, \quad b_n = a_{m_n}, \quad \ldots$$

nazywamy *podciągiem ciągu* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Na przykład ciąg $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$ jest podciągiem ciągu $a_1, a_2, \ldots$ Natomiast ciąg $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots$ nie jest jego podciągiem, ponieważ wskaźniki nie tworzą tu ciągu rosnącego.

Zachodzi wzór ogólny

(19) $$m_n \geqslant n.$$

Jest tak oczywiście dla $n = 1$, tj. $m_1 \geqslant 1$ (bo m_1 jest liczbą naturalną). Stosując indukcję załóżmy, że dla danego n zachodzi wzór (19). Mamy wówczas $m_{n+1} > m_n \geqslant n$, a zatem $m_{n+1} \geqslant n+1$. Otrzymaliśmy w ten sposób wzór (19) dla $n+1$. Wzór ten jest więc ogólnie prawdziwy dla każdego n.

W myśl naszej definicji każdy ciąg jest swoim własnym podciągiem. Ogólnie powiedzieć możemy, że podciąg powstaje z ciągu przez opuszczenie pewnej ilości jego elementów (skończonej, nieskończonej lub zerowej). Stąd wynika również, że podciąg $\{a_{m_{k_n}}\}$ podciągu $\{a_{m_n}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\}$.

TWIERDZENIE 1. *Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy, co ciąg dany.*

Inaczej mówiąc,

(20) $$\textit{jeśli } \lim_{n=\infty} a_n = g \textit{ oraz } m_1 < m_2 < \ldots, \textit{ to } \lim_{n=\infty} a_{m_n} = g.$$

Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie k, że dla $n > k$ spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Na mocy wzoru (19) $m_n \geqslant n > k$. A zatem $|a_{m_n} - g| < \varepsilon$. Wynika stąd, że $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

TWIERDZENIE 2 (BOLZANO-WEIERSTRASSA [1]). *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.*

Dowód. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie ograniczony. Istnieje więc takie M, że dla każdego n zachodzi nierówność $-M < a_n < M$.

Zastosujemy teraz twierdzenie z § 1.7. Oznaczmy przez Z zbiór liczb x takich, że nierówność $x < a_n$ jest spełniona dla nieskończenie wielu n. Zbiór Z jest niepusty, ponieważ liczba $-M$ należy do Z (bowiem nierówność $-M < a_n$ jest spełniona dla wszystkich n). Jednocześnie zbiór ten jest ograniczony z góry; istotnie, jeśli x należy do Z, to $x < M$, z przypuszczenia bowiem, że $x \geqslant M$ wynika, że nierówność $x < a_n$ nie jest spełniona dla żadnego n (a więc x nie może należeć do Z).

Ponieważ zbiór Z jest niepusty i ograniczony z góry, więc istnieje kres górny tego zbioru. Oznaczmy go przez g. Z definicji kresu górnego wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele n takich, że

$$g - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant g + \varepsilon$$

(gdyż $g - \varepsilon$ należy do zbioru Z, a $g + \varepsilon$ do niego nie należy).

[1] Znakomity matematyk K. Weierstrass (1815-1897) jest jednym z twórców teorii funkcji analitycznych. B. Bolzano — czeski matematyk (1781-1848).

Wykażemy obecnie, że g jest granicą pewnego podciągu ciągu $\{a_n\}$. Należy więc określić ciąg liczb naturalnych $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ w taki sposób, aby $\lim_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

W tym celu podstawmy najpierw na miejsce ε wartość 1. Istnieje więc nieskończenie wiele n takich, że

$$g-1 < a_n \leqslant g+1.$$

Oznaczmy przez m_1 którekolwiek z tych n. Mamy więc

$$g-1 < a_{m_1} \leqslant g+1.$$

Podstawmy z kolei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Istnieje zatem nieskończenie wiele n takich, że $g-\frac{1}{2} < a_n \leqslant g+\frac{1}{2}$. Wśród tych n istnieją więc liczby większe od m_1; oznaczmy którąkolwiek z nich przez m_2. Mamy więc

$$g-\tfrac{1}{2} < a_{m_2} \leqslant g+\tfrac{1}{2}, \qquad m_1 < m_2.$$

Podobnie znajdziemy m_3 takie, że

$$g-\tfrac{1}{3} < a_{m_3} \leqslant g+\tfrac{1}{3}, \qquad m_2 < m_3.$$

Ogólnie, mając określone m_n, określamy m_{n+1}, w taki sposób, aby

$$(21) \qquad g-1/(n+1) < a_{m_{n+1}} \leqslant g+1/(n+1), \qquad m_n < m_{n+1}.$$

Zastosujemy wzór (17) na podwójną nierówność. Ponieważ $\lim(1/n) = 0$, przeto

$$\lim(g-1/n) = g = \lim(g+1/n).$$

Wnosimy więc ze wzoru (21) (w którym oczywiście zastąpić można $n+1$ przez n), że $\lim_{n=\infty} a_{m_n} = g$. Wreszcie z nierówności $m_n < m_{n+1}$ wynika, że ciąg $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots$ jest podciągiem ciągu $a_1, a_2, \ldots$

Twierdzenie jest zatem udowodnione.

Jako wniosek z powyższego twierdzenia, wyprowadzimy

TWIERDZENIE 3. *Każdy ciąg monotoniczny ograniczony jest zbieżny. Przy tym, jeżeli* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, *to* $a_n \leqslant \lim_{n=\infty} a_n$; *jeżeli* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$, *to* $a_n \geqslant \lim_{n=\infty} a_n$.

Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i rosnący w szerszym sensie. Oznaczmy przez Z zbiór liczb należących do tego ciągu i przez g — kres górny zbioru Z (por. § 1.7). A więc mamy

$$g \geqslant a_n \quad \text{dla każdego } n;$$

jednocześnie dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje k takie, że $g-\varepsilon < a_k$ (bowiem nierówność $g-\varepsilon \geqslant a_n$ nie może być spełniona dla wszystkich n na podstawie definicji kresu górnego).

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący (w szerszym sensie), nierówność $n > k$ pociąga za sobą $a_k \leqslant a_n$, a stąd $g-\varepsilon < a_n$. A więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla $n > k$ spełniona jest podwójna nierówność

$$g-\varepsilon < a_n \leqslant g, \quad \text{skąd} \quad |a_n - g| < \varepsilon;$$

to zaś oznacza, że $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$.

Aby udowodnić, że $a_n \leqslant g$ dla każdego n, weźmy pod uwagę jakąś ustaloną liczbę naturalną n_0. Należy udowodnić, że $a_{n_0} \leqslant g$. Otóż na podstawie założenia:

$$a_{n_0} \leqslant a_{n_0+1}, \quad a_{n_0} \leqslant a_{n_0+2}, \quad \ldots, \quad a_{n_0} \leqslant a_{n_0+k}, \quad \ldots$$

A zatem na mocy (15), $a_{n_0} \leqslant \lim\limits_{k=\infty} a_{n_0+k} = g$.

Twierdzenie 3 jest udowodnione dla ciągów niemalejących. Dowód dla ciągów nierosnących jest analogiczny.

Jak wynika z twierdzenia 1, ciąg zbieżny nie może zawierać dwóch podciągów zbieżnych do różnych granic (skąd w szczególności wynika, że ciąg $0, 1, 0, 1, \ldots$ jest rozbieżny). W obrębie ciągów ograniczonych twierdzenie to daje się odwrócić. Zachodzi mianowicie

TWIERDZENIE 4 [1]. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i jeżeli wszystkie jego podciągi zbieżne są zbieżne do tej samej granicy g, to również ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy g.*

Inaczej mówiąc, *każdy ciąg ograniczony rozbieżny zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic.*

Dowód. Przypuśćmy, że g nie jest granicą ciągu $\{a_n\}$. Istnieje wówczas takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego k istnieje $n > k$, czyniące zadość nierówności $|a_n - g| \geqslant \varepsilon$. Wnioskujemy stąd, że istnieje podciąg $\{a_{m_n}\}$ taki, że przy każdym n mamy $|a_{m_n} - g| \geqslant \varepsilon$. Podstawiając bowiem za k wartość 1 wnosimy, że istnieje $m_1 > 1$ takie, że $|a_{m_1} - g| \geqslant \varepsilon$. Podstawiając z kolei $k = m_1$, wnosimy, że istnieje $m_2 > m_1$, dla którego $|a_{m_2} - g| \geqslant \varepsilon$. Podobnie istnieje $m_3 > m_2$ takie, że $|a_{m_3} - g| \geqslant \varepsilon$, itd.

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, więc i ciąg $\{a_{m_n}\}$ jest ograniczony. Ten ostatni zawiera więc na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa podciąg zbieżny. Oznaczmy ten podciąg przez $\{a_{m_{r_n}}\}$. Ponieważ jest to równocześnie podciąg ciągu $\{a_n\}$, więc z założenia

$$\lim_{n=\infty} a_{m_{r_n}} = g, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n=\infty} (a_{m_{r_n}} - g) = 0.$$

Z drugiej strony, ponieważ liczby $m_{r_1}, m_{r_2}, \ldots$ należą do ciągu $m_1, m_2, \ldots$, więc z nierówności $|a_{m_n} - g| \geqslant \varepsilon$ wnosimy, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_{m_{r_n}} - g| \geqslant \varepsilon$. Stąd sprzeczność.

Dowiedliśmy więc przez sprowadzenie do niedorzeczności, że $\lim\limits_{n=\infty} a_n = g$.

[1] Będziemy stosować to twierdzenie w § 5.5.

2.7. Twierdzenie Cauchy'ego[1].

TWIERDZENIE. *Na to, żeby ciąg $\{a_n\}$ był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba r, że dla $n > r$ zachodzi nierówność*

$$|a_n - a_r| < \varepsilon. \tag{22}$$

Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej części udowodnimy, że jeżeli ciąg jest zbieżny, to warunek sformułowany w twierdzeniu, tzw. *warunek Cauchy'ego*, jest spełniony; czyli że warunek ten jest warunkiem koniecznym zbieżności ciągu. W drugiej części dowodu wykażemy, że jeśli warunek Cauchy'ego jest spełniony, to ciąg jest zbieżny; czyli że warunek ten jest wystarczający dla zbieżności ciągu.

1° Niech więc $\lim a_n = g$. Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie r, że dla $n \geqslant r$ zachodzi $|a_n - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Nierówność ta zachodzi w szczególności dla $n = r$, tj. $|a_r - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dodając te dwie nierówności pod znakiem bezwzględnej wartości, otrzymujemy wzór (22).

2° Załóżmy teraz, że warunek Cauchy'ego jest spełniony. Należy dowieść, że ciąg jest zbieżny. Udowodnimy przede wszystkim, że jest to ciąg ograniczony. Dowód przeprowadzimy analogicznie do dowodu z § 2.3. Podstawmy mianowicie $\varepsilon = 1$. Istnieje więc takie r, że dla $n > r$ mamy $|a_n - a_r| < 1$. Stąd

$$|a_n| - |a_r| \leqslant |a_n - a_r| < 1\,,$$

a więc $|a_n| < |a_r| + 1$. Oznaczmy przez M liczbę większą od każdej spośród r następujących liczb: $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{r-1}|, |a_r|+1$. Mamy więc $M > |a_n|$ dla każdego n. Oznacza to, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

Wnosimy stąd na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, że ciąg ten zawiera podciąg zbieżny. Niech więc $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$, przy czym $m_1 < m_2 < \ldots$ Udowodnimy, że $g = \lim\limits_{n=\infty} a_n$.

Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$. Na mocy warunku Cauchy'ego istnieje takie r, że dla $n > r$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - a_r| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\,. \tag{23}$$

Na mocy równości $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$ istnieje takie k, że dla $n > k$ mamy

$$|a_{m_n} - g| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\,. \tag{24}$$

Rzecz jasna, że można było dobrać k w taki sposób, aby $k > r$. Wówczas dla $n > k$ obie nierówności (23) i (24) są spełnione równocześnie.

Ponadto, ponieważ $m_n \geqslant n > r$ (por. (19)), można więc we wzorze (23) zastąpić n przez m_n. Daje to

$$|a_{m_n} - a_r| < \tfrac{1}{3}\varepsilon\,. \tag{25}$$

---

[1] Augustin Cauchy (1789-1857) — jeden z najwybitniejszych matematyków francuskich. Ustalenie podstawowych pojęć i twierdzeń teorii ciągów i szeregów oraz teorii funkcji ciągłych jest w znacznym stopniu jego dziełem.

Dodając do siebie nierówności (23)-(25), zmieniwszy uprzednio znak pod znakiem bezwzględnej wartości w nierówności (25), otrzymujemy nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$, która jest spełniona dla każdego $n > k$. Oznacza to, że $\lim a_n = g$.

Uwaga 1. W twierdzeniu Cauchy'ego, podobnie jak w definicji granicy, zastąpić można znak $>$ w nierówności $n > k$, jak również znak $<$ we wzorze (22), odpowiednio przez $\geqslant$ i $\leqslant$.

Uwaga 2. Warunek Cauchy'ego można również w taki sposób sformułować: *dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* r, *że warunki* $n > r$ *i* $n' > r$ *pociągają za sobą* $|a_n - a_{n'}| < \varepsilon$.

Z warunku Cauchy'ego wynika bowiem, że istnieje takie r, że dla $n > r$ i $n' > r$ zachodzą nierówności $|a_n - a_r| < \frac{1}{2}\varepsilon$ i $|a_{n'} - a_r| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dodając je otrzymujemy $|a_n - a_{n'}| < \varepsilon$.

2.8. Rozbieżność do ∞. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ *jest rozbieżny* do ∞, jeśli do każdej liczby r istnieje takie k, że dla $n > k$ jest $a_n > r$. Zapisujemy to symbolicznie w postaci równości: $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$. Ciąg rozbieżny do ∞ jest to więc ciąg, którego wyrazy o dostatecznie dużych wskaźnikach stają się dowolnie wielkie.

Analogicznie określamy znaczenie wyrażenia $\lim\limits_{n=\infty} a_n = -\infty$. Oznacza ono, że dla każdej liczby r istnieje takie k, że dla $n > k$ jest $a_n < r$.

O ciągach rozbieżnych do ∞ lub do $-\infty$ mówimy, że posiadają *granice niewłaściwe*.

PRZYKŁADY. $\lim\limits_{n=\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n=\infty} (-n) = -\infty$.

TWIERDZENIE 1. *Ciąg rosnący (w szerszym sensie) nieograniczony z góry jest rozbieżny do* ∞.

Istotnie, ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry, więc dla każdej liczby r istnieje takie k, że $a_k > r$. Ponieważ zaś jest to ciąg rosnący w szerszym sensie, więc dla $n > k$ mamy $a_n \geqslant a_k$, skąd $a_n > r$. A zatem $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla ciągów malejących.

Zestawiając to twierdzenie z twierdzeniem 3, z § 2.6, wnosimy, że *każdy ciąg monotoniczny posiada granicę właściwą lub niewłaściwą* (*w zależności od tego czy jest ograniczony, czy nieograniczony*).

TWIERDZENIE 2. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \pm\infty$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} (1/a_n) = 0$.

Niech bowiem $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ i niech $\varepsilon > 0$. Kładąc $r = 1/\varepsilon$, wnosimy, że istnieje takie k, że dla $n > k$ zachodzi $a_n > 1/\varepsilon$, tj. $1/a_n < \varepsilon$, co oznacza, że $\lim(1/a_n) = 0$.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: ciąg $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ jest zbieżny do 0, lecz ciąg jego odwrotności $1, -2, 3, -4, \ldots$ nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$.

Odnośnie działań na ciągach rozbieżnych do nieskończoności wymienimy twierdzenie następujące: *suma i iloczyn dwóch ciągów rozbieżnych do $+\infty$ są rozbieżne do $+\infty$.* Udowodnimy to twierdzenie w następującej, nieco zaostrzonej postaci.

TWIERDZENIE 3. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$, *a ciąg* $\{b_n\}$ *jest ograniczony z dołu, to* $\lim\limits_{n=\infty}(a_n+b_n) = \infty$.

Niech bowiem $M < b_n$. Ponieważ $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$, istnieje więc dla danego r taka liczba k, że dla $n > k$ zachodzi $a_n > r-M$. A zatem $a_n+b_n > r$, skąd wnosimy, że $\lim\limits_{n=\infty}(a_n+b_n) = \infty$.

TWIERDZENIE 4. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ *oraz stale* $b_n \geqslant c$, *przy czym* $c > 0$, *to* $\lim\limits_{n=\infty}(a_n b_n) = \infty$.

Niech bowiem dana będzie liczba $r > 0$. Z założenia istnieje takie k, że dla $n > k$ mamy $a_n > (r/c)$. Mnożąc tę nierówność przez nierówność $b_n \geqslant c$, otrzymujemy $a_n b_n > r$. Stąd $\lim\limits_{n=\infty}(a_n b_n) = \infty$.

Odpowiednikiem twierdzenia (15) jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 5. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ *oraz* $a_n \leqslant b_n$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} b_n = \infty$.

Jeśli bowiem $a_n > r$, to tym bardziej $b_n > r$.

2.9. Przykłady.

PRZYKŁAD 1. *Jeśli* $c > 0$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} nc = \infty$.

Wynika natychmiast z twierdzenia 4.

PRZYKŁAD 2. *Jeśli* $a > 1$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} a^n = \infty$.

Przyjmując bowiem $c = a-1$, mamy $c > 0$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} nc = \infty$. Zarazem na mocy nierówności Bernoulliego ((1), § 1.2)

$$a^n = (1+c)^n \geqslant 1+nc, \quad \text{skąd} \quad \lim_{n=\infty} a^n = \infty$$

na mocy twierdzenia 5.

PRZYKŁAD 3. *Jeśli* $|q| < 1$, *to* $\lim q^n = 0$.

Załóżmy najpierw, że $0 < q < 1$. Wówczas $1/q > 1$, a więc $\lim\limits_{n=\infty}(1/q^n) = \infty$. Stąd na mocy twierdzenia 2 mamy $\lim\limits_{n=\infty} q^n = 0$.

Wynika stąd, że w ogólnym wypadku, gdy zakładamy jedynie, że $|q| < 1$, spełniona jest równość $\lim\limits_{n=\infty} |q|^n = 0$, tj. $\lim\limits_{n=\infty} |q^n| = 0$. Lecz ta ostatnia równość pociąga $\lim\limits_{n=\infty} q^n = 0$ (por. (18)).

PRZYKŁAD 4. *Jeśli* $a>0$, *to* $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Załóżmy najpierw, że $a>1$. Przyjmijmy $u_n=\sqrt[n]{a}$. Udowodnimy, że ciąg $\{u_n\}$ jest malejący. Istotnie, ponieważ $a>1$, więc $a^n<a^{n+1}$. Biorąc pierwiastek stopnia $n(n+1)$ obu stron, otrzymamy $\sqrt[n+1]{a}<\sqrt[n]{a}$, tj. $u_n>u_{n+1}$. Zarazem ciąg ten jest ograniczony, ponieważ $u_n>1$. Wnosimy stąd, że jest to ciąg zbieżny (por. tw. 3, § 2.6). Należy dowieść, że granicą tego ciągu jest 1. Przyjmijmy $\lim u_n=1+h$. Ponieważ $u_n>1$; więc $h\geqslant 0$ (na mocy cytowanego twierdzenia). Udowodnimy, że przypuszczenie, że $h>0$, prowadzi do sprzeczności.

Istotnie, nierówność $1+h<\sqrt[n]{a}$ daje $(1+h)^n<a$. Ponieważ zaś $(1+h)^n\geqslant 1+nh$, dochodzimy do wniosku, że dla każdego n mamy $1+nh<a$, co wobec tego, że $\lim\limits_{n=\infty}nh=\infty$, jest niemożliwe.

Udowodniliśmy więc, że

$$\text{jeśli}\quad a>1,\quad \text{to}\quad \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

Jeśli zaś $0<a\leqslant 1$, to $1/a\geqslant 1$, a zatem

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{1/a}=1,\quad \text{tj.}\quad \lim_{n=\infty}(1/\sqrt[n]{a})=1.$$

Stąd $1/\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1$, tj. $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

PRZYKŁAD 5. *Jeśli* $|q|<1$, to

$$\lim_{n=\infty}a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})=\frac{a}{1-q}.$$

Jest to wyrażenie na sumę postępu geometrycznego o ilorazie bezwzględnie mniejszym od jedności.

Mamy bowiem

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}\quad\text{oraz}\quad \lim q^n=0$$

(por. przykład 3).

PRZYKŁAD 6. *Jeśli* $a>0$ *i jeśli* $\{r_n\}$ *jest ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do* 0, *to* $\lim\limits_{n=\infty}a^{r_n}=1$.

Jest to uogólnienie twierdzenia z przykładu 4, które łatwo z niego wyprowadzić.

2.10. Liczba e. Udowodnimy istnienie

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Granicę tę oznaczać będziemy symbolem e.

Przyjmijmy $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mamy więc

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}, \quad \ldots$$

Udowodnimy, że ciąg ten jest rosnący. Zastosujmy w tym celu wzór na dwumian Newtona (§ 1.3):

$$a_n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!},$$

skąd

$$a_{n+1} = 1+1+\frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{3!}+\ldots+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)}{n!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}.$$

Widzimy więc, że składniki sumy tworzącej a_n są nie większe odpowiednio od pierwszych $n+1$ składników tworzących a_{n+1}. Stąd $a_n < a_{n+1}$.

Ciąg jest więc rosnący. Jest przy tym ograniczony, bowiem

$$a_n < 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

ponieważ (por. przykład 5, § 2.9)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Ciąg $\{a_n\}$, jako rosnący i ograniczony, jest zbieżny. Istnienie więc liczby e zostało udowodnione. W przybliżeniu $e = 2{,}718\ldots$ Można też dowieść (jak okażemy później), że

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right).$$

Liczba e odgrywa dużą rolę w analizie. W szczególności służy ona jako podstawa logarytmów (tzw. *naturalnych*).

Udowodnimy jeszcze, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}. \tag{26}$$

Istotnie, mamy

$$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}},$$

a więc

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e},$$

bo

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1.$$

2.11*. Ciągi średnich arytmetycznych i średnich geometrycznych danego ciągu. Mając dany ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, weźmy pod uwagę *ciąg średnich arytmetycznych*

$$a_1,\quad \frac{a_1+a_2}{2},\quad \ldots,\quad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\quad \ldots$$

TWIERDZENIE 1. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = g$, *to* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=g$. *Przy tym twierdzenie to zachodzi również dla* $g=\pm\infty$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że g jest liczbą skończoną. Dla danego $\varepsilon>0$ istnieje więc takie k, że dla każdego $n>k$ spełnione są nierówności:

$$g-\varepsilon<a_{k+1}<g+\varepsilon,\quad g-\varepsilon<a_{k+2}<g+\varepsilon,\quad \ldots,\quad g-\varepsilon<a_n<g+\varepsilon.$$

Dodając stronami układ tych $n-k$ nierówności, otrzymujemy

$$g-\varepsilon<\frac{a_{k+1}+\ldots+a_n}{n-k}<g+\varepsilon,$$

czyli

$$(g-\varepsilon)\frac{n-k}{n}<\frac{a_{k+1}+\ldots+a_n}{n}<(g+\varepsilon)\frac{n-k}{n}.$$

Zarazem $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_1+\ldots+a_k}{n}=0$, a więc $-\varepsilon<\frac{a_1+\ldots+a_k}{n}<\varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. Stąd

$$(g-\varepsilon)\frac{n-k}{n}-\varepsilon<\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}<(g+\varepsilon)\frac{n-k}{n}+\varepsilon.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty}\frac{n-k}{n}=1$, więc dla dostatecznie dużych n mamy

$$g-3\varepsilon<\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}<g+3\varepsilon.$$

Oznacza to, że
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=g.$$

Załóżmy obecnie, że $g=\infty$ (dowód dla $g=-\infty$ jest analogiczny). Dla danej liczby $r>0$ istnieje więc takie k, że $a_{k+1}>r$, $a_{k+2}>r,\ldots$ A zatem dla każdego $n>k$ mamy
$$a_{k+1}+\ldots+a_n>(n-k)r,$$
skąd
$$\frac{a_{k+1}+\ldots+a_n}{n}>\frac{n-k}{n}r.$$
Ponieważ zaś dla dużych n jest $\frac{a_1+\ldots+a_k}{n}>-\frac{r}{2}$, więc
$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}>\frac{n-k}{n}r-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}-\frac{k}{n}r,$$
skąd dla dostatecznie dużych n otrzymujemy $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}>\frac{r}{3}$. Wnosimy stąd, że
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}=\infty.$$

Uwaga. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: ciąg może być rozbieżny, a ciąg jego średnich arytmetycznych zbieżny. Na przykład ciąg $1,0,1,0,\ldots$ jest rozbieżny, a ciąg jego średnich arytmetycznych jest zbieżny do $\frac{1}{2}$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla *średnich geometrycznych*:

Twierdzenie 2. *Jeśli* $a_n>0$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=g$ *(g skończone lub nieskończone), to*
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=g.$$

Dowód tego twierdzenia przeprowadzić można w sposób zupełnie podobny do dowodu twierdzenia 1. Można również twierdzenie 2 wyprowadzić z twierdzenia 1 przez logarytmowanie (opierając się na ciągłości funkcji $\log x$, por. § 5.5).

Twierdzenie 3. *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=g$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=g$.

Istotnie, połóżmy $b_n=a_n-a_{n-1}$ dla $n>1$ oraz $b_1=a_1$. Mamy więc
$$\lim_{n\to\infty}b_n=g\quad\text{oraz}\quad\frac{b_1+\ldots+b_n}{n}=\frac{a_n}{n}.$$
Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=g$ na mocy twierdzenia 1.

TWIERDZENIE 4. *Jeśli* $a_n > 0$ *i* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzenia 2, kładąc $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ dla $n > 1$ oraz $b_1 = a_1$. Mamy bowiem $\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} = \sqrt[n]{a_n}$.

PRZYKŁAD 1. Kładąc $a_n = n$, mamy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Stąd $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

PRZYKŁAD 2. $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, bo $\lim\limits_{n=\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n=\infty}(n+1) = \infty$.

PRZYKŁAD 3. Przykład ciągu $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ wykazuje, że może istnieć granica $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}$, mimo że nie istnieje granica $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Zadania

1. Obliczyć granice:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{5n+1}{7n-2}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2-1}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}.$$

2. Niech dany będzie zbieżny ciąg $\{a_n\}$. Udowodnić, że jeśli w tym ciągu dokonać zamiany skończonej ilości wyrazów przez inne, to ciąg w ten sposób otrzymany jest również zbieżny i do tej samej granicy, co ciąg dany.

Podobnie: skreślenie lub dołączenie do ciągu skończonej ilości wyrazów nie ma wpływu ani na zbieżność ciągu, ani na wartość jego granicy.

3. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ i jeśli ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to $\lim\limits_{n=\infty} a_n b_n = 0$.

4. Dowieść, że jeśli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy, to i ciąg $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ jest zbieżny do tej granicy.

5. Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia o granicy podciągów (tw. 1, § 2.6): *jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = g$ (*przy czym* g *ma wartość skończoną lub nieskończoną*) *oraz* $\lim\limits_{n=\infty} m_n = \infty$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

6. Obliczyć $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$.

7. Określamy ciąg $\{a_n\}$ indukcyjnie jak następuje:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Dowieść, że $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

8. Niech dany będzie ciąg ograniczony $\{a_n\}$. Udowodnić, że wśród liczb, stanowiących granice podciągów zbieżnych tego ciągu, istnieje liczba największa oraz liczba najmniejsza (liczby te noszą nazwę *limes superior* oraz *limes inferior* ciągu $\{a_n\}$, czyli *granica górna* względnie *dolna* ciągu $\{a_n\}$).

Udowodnić, że na to, aby ciąg był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby jego granica górna równała się granicy dolnej.

Dowieść, że jeśli $c = \limsup a_n$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność $a_n < c + \varepsilon$ i że przy tym dla nieskończenie wielu wskaźników m zachodzi nierówność $a_m > c - \varepsilon$.

9. Udowodnić, że dla każdego ciągu przedziałów domkniętych, z których każdy następny jest zawarty w poprzednim, istnieje przynajmniej jeden punkt wspólny (*twierdzenie Ascoliego*).

W twierdzeniu powyższym rozważa się przedziały domknięte, tj. przedziały wraz z końcami; wykazać na przykładzie, że twierdzenie to nie zachodzi dla przedziałów otwartych (por. notka na str. 14).

10. Znaleźć granicę ciągu $\{a_n\}$ określonego przez indukcję:

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

11. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n=\infty} a_n = g$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \infty$, przy czym stale $b_n > 0$, to

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g.$$

12. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = g$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} v_n = \infty$, przy czym ciąg $\{v_n\}$ jest rosnący, to $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = g$.

W s k a z ó w k a. Podstawić w zadaniu poprzednim: $a_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$, $b_n = v_n - v_{n-1}$.

13. *Trójkąt Pascala* (¹). Rozważamy następującą tablicę (czyli ciąg podwójny $\{a_{nk}\}$)

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \ldots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Tablica ta jest określona jak następuje: pierwszy wiersz składa się z samych jedynek, tj. $a_{1k} = 1$; k-ty wyraz n-tego wiersza jest sumą pierwszych k wyrazów $(n-1)$-ego wiersza, tj.

$$a_{nk} = a_{n-1,1} + a_{n-1,2} + \ldots + a_{n-1,k}.$$

Dowieść, że

$$a_{nk} = \frac{(k+n-2)!}{(k-1)!\,(n-1)!}$$

oraz że wyrazy $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1,n}$ stanowią kolejne współczynniki rozwinięcia Newtona wyrażenia $(a+b)^{n-1}$ (są to, jak widać, wyrazy tablicy położone na prostej łączącej n-ty wyraz pierwszego wiersza z pierwszym wyrazem n-tego wiersza).

(¹) B. Pascal (1623-1662), matematyk francuski znany z prac, które zapoczątkowały rachunek prawdopodobieństwa. Poprzednik Newtona w niektórych zagadnieniach analizy matematycznej.

14. Dowieść, że

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

15. Dowieść, że jeśli ciąg liczb wymiernych $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ (gdzie p_n i q_n są liczbami naturalnymi) zmierza do liczby niewymiernej, to

$$\lim_{n=\infty} p_n = \infty = \lim_{n=\infty} q_n.$$

§ 3. Szeregi nieskończone

3.1. Definicje i przykłady. Utwórzmy dla danego ciągu nieskończonego $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ następujący ciąg nieskończony:

(1) $$s_1 = a_1,\quad s_2 = a_1+a_2,\quad \ldots,\quad s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n,\quad \ldots$$

Jeśli ciąg $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ posiada granicę, to granicę tę oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n=\infty} s_n$$

i nazywamy ją *sumą szeregu nieskończonego* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$

W tym przypadku mówimy też, że *szereg* jest *zbieżny*. Jeśli granica ta nie istnieje, to szereg nazywamy *rozbieżnym*.

W przypadku gdy wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$, poczynając od pewnego k, są równe 0, mamy do czynienia ze zwykłą sumą skończonej ilości składników. Suma szeregu nieskończonego jest więc uogólnieniem dodawania na nieskończoną ilość składników (co uwydatnione jest w znakowaniu). W odróżnieniu jednak od dodawania skończonej ilości składników, dodawanie nieskończonej ilości składników nie zawsze jest wykonalne, tj. ciąg (1) nie zawsze jest zbieżny (nawet gdy uwzględniać granice nieskończone).

Podamy parę przykładów.

Szereg geometryczny $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ o ilorazie czyniącym zadość nierówności $|q|<1$ jest zbieżny. Mianowicie (przykład 5, § 2,9):

$$a+aq+aq^2+\ldots = \frac{a}{1-q}.$$

Szereg $1+1+1+\ldots$ jest rozbieżny do ∞, bowiem $s_n = n$.

Szereg $1-1+1-1+\ldots$ nie posiada ani właściwej, ani niewłaściwej granicy, ciąg (1) w tym przypadku bowiem jest to ciąg: $1, 0, 1, 0, \ldots$

Ciąg $\{s_n\}$ nazywać będziemy ciągiem *sum częściowych* danego szeregu nieskończonego.

Przez *n-tą resztę* szeregu $a_1+a_2+\dots$ rozumiemy szereg

$$(2) \qquad r_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\dots = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m.$$

Jeśli szereg $a_1+a_2+\dots$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n=\infty} r_n = 0$.

Zauważmy przede wszystkim, że jeśli szereg $a_1+a_2+\dots$ jest zbieżny, to i szereg (2) jest zbieżny przy każdej wartości n. Ponieważ

$$r_n = \lim_{k=\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+k}) = \lim_{k=\infty} s_{n+k}-s_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - s_n,$$

więc

$$\lim_{n=\infty} r_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - \lim_{n=\infty} s_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - \sum_{m=1}^{\infty} a_m = 0.$$

3.2. Ogólne własności szeregów. Podamy obecnie kilka własności szeregów nieskończonych, które są bezpośrednimi konsekwencjami odpowiednich własności ciągów nieskończonych.

TWIERDZENIE 1 (WARUNEK CAUCHY'EGO). *Na to, żeby szereg $a_1+a_2+\dots$ był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba k, że dla każdego m spełniona jest nierówność*

$$(3) \qquad |a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_{k+m}| < \varepsilon.$$

Zbieżność szeregu danego oznacza bowiem to samo, co zbieżność ciągu jego sum częściowych $s_1, s_2, \dots$, na mocy zaś twierdzenia Cauchy'ego (§ 2.7) na to, żeby ten ciąg był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie k, żeby dla każdego m spełniona była nierówność $|s_{k+m}-s_k| < \varepsilon$, tj. żeby spełniona była nierówność (3).

TWIERDZENIE 2. *Jeśli szereg $a_1+a_2+\dots$ jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$.

Ponieważ $a_n = s_n - s_{n-1}$, więc

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} s_n - \lim_{n=\infty} s_{n-1} = 0,$$

gdyż $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \lim\limits_{n=\infty} s_{n-1}$.

Uwaga. Twierdzenie 2 nie daje się odwrócić. *Istnieją bowiem szeregi rozbieżne o składniku dążącym do* 0. Taki jest np. *szereg harmoniczny*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

Istotnie,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{1}{2},$$

to znaczy

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} > \tfrac{1}{2}.$$

Stąd $s_{2^n} > \frac{1}{2}n$. A zatem $\lim\limits_{n=\infty} s_{2^n} = \infty$, skąd wnosimy, że ciąg sum częściowych szeregu harmonicznego, a zatem sam szereg — jest rozbieżny. Jest to szereg rozbieżny do ∞.

Szereg nazywamy *ograniczonym*, jeśli ciąg jego sum częściowych jest ograniczony, tj. jeśli istnieje liczba M taka, że $M > |s_n|$ dla każdego n.

TWIERDZENIE 3. *Każdy szereg zbieżny jest ograniczony.*

Jest to natychmiastowa konsekwencja twierdzenia z § 2.3.

Odnośnie do działań na szeregach podamy obecnie dwa twierdzenia:

TWIERDZENIE 4. *Jeśli szeregi $a_1+a_2+\ldots$ i $b_1+b_2+\ldots$ są zbieżne, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n=\infty}(a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_n+b_n) = \\ &= \lim_{n=\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)+\lim_{n=\infty}(b_1+b_2+\ldots+b_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n.\end{aligned}$$

Dowód dla różnicy jest analogiczny.

TWIERDZENIE 5. *Jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

W szczególności

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) &= \lim_{n=\infty}(ca_1+ca_2+\ldots+ca_n) = \\ &= c\lim_{n=\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n) = c\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\end{aligned}$$

3.3. Szeregi naprzemienne. Twierdzenie Abela. *Szeregiem naprzemiennym* nazywamy szereg postaci

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots, \quad \text{gdzie } a_n \geqslant 0. \tag{4}$$

TWIERDZENIE 1. *Szereg naprzemienny* (4), *spełniający warunki*

(5) $$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \quad \textit{oraz} \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

jest zbieżny. Przy tym sumy częściowe $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_n$ *czynią zadość nierówności*

(6) $$s_{2n} \leqslant a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \leqslant s_{2n+1}.$$

Istotnie, ciąg sum częściowych o wskaźnikach parzystych jest rosnący (w szerszym sensie), bowiem

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}), \quad \text{a} \quad a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant 0.$$

Zarazem jest to ciąg ograniczony, bo

$$s_{2n} = a_1 - \big((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + a_{2n}\big) \leqslant a_1.$$

A zatem jest to ciąg zbieżny. Niech więc $\lim\limits_{n=\infty} s_{2n} = g$. Aby dowieść, że szereg (4) jest zbieżny, wystarczy wykazać, że $\lim\limits_{n=\infty} s_{2n+1} = g$.

Otóż $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, skąd

$$\lim_{n=\infty} s_{2n+1} = \lim_{n=\infty} s_{2n} + \lim_{n=\infty} a_{2n+1} = g,$$

bo $\lim\limits_{n=\infty} a_{2n+1} = 0$, w myśl (5).

Wreszcie podwójna nierówność (6) wynika stąd, że ciąg $\{s_{2n}\}$ jest rosnący, a ciąg $\{s_{2n+1}\}$ malejący (por. tw. 3, § 2.6).

PRZYKŁADY. *Szereg anharmoniczny*

(7) $$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

jest zbieżny. Sumą jego jest, jak później okażemy, $\log_e 2$.

Zbieżny jest również szereg (którego sumą jest $\frac{1}{4}\pi$):

(8) $$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

TWIERDZENIE 2 (ABELA [1]). *Jeżeli ciąg* $\{a_n\}$ *spełnia warunki* (5), *szereg zaś (zbieżny lub rozbieżny)* $b_1 + b_2 + \ldots$ *jest ograniczony, to szereg*

(9) $$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$$

jest zbieżny.

Przyjmujemy $s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Na mocy założenia istnieje takie M, że $|s_n| < M$.

Aby dowieść, że szereg (9) jest zbieżny, należy oszacować sumę

$$a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \ldots + a_n b_n$$

---

[1] N. H. Abel (1802-1829) — słynny algebraik norweski.

dla $n > k$. Zauważmy w tym celu przede wszystkim, że

$$-2M < b_m + b_{m+1} + \dots + b_n < 2M \tag{10}$$

dla każdego m i $n \geqslant m$, bo

$$|b_m + \dots + b_n| = |s_n - s_{m-1}| \leqslant |s_n| + |s_{m-1}| < 2M.$$

Otóż

$$\begin{aligned} a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \dots + a_n b_n &= \\ = (a_k - a_{k+1}) b_k + (a_{k+1} - a_{k+2})(b_k + b_{k+1}) &+ \\ + (a_{k+2} - a_{k+3})(b_k + b_{k+1} + b_{k+2}) + \dots + a_n (b_k + b_{k+1} + \dots + b_n) &\leqslant \\ \leqslant 2M\big((a_k - a_{k+1}) + (a_{k+1} - a_{k+2}) + \dots + a_n\big) &= 2Ma_k \end{aligned} \tag{11}$$

na mocy (10).

Analogicznie $a_k b_k + \dots + a_n b_n \geqslant -2Ma_k$, a zatem

$$|a_k b_k + \dots + a_n b_n| \leqslant 2Ma_k. \tag{12}$$

Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$. Na mocy równości (5) istnieje takie k, że $a_k < \varepsilon/2M$. Jak udowodniliśmy, dla każdego $n > k$ zachodzi nierówność (12), tj. $|a_k b_k + \dots + a_n b_n| < \varepsilon$. Zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego (tw. 1, § 3.2) oznacza to, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Uwaga 1. Ze wzoru (12) wynika, że

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\Big| \leqslant 2Ma_1. \tag{13}$$

Na mocy bowiem wzoru (12) nierówność $|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leqslant 2Ma_1$ zachodzi dla każdego n.

Uwaga 2. Twierdzenie 1 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 2. Mianowicie, gdy za ciąg $\{b_n\}$ przyjmujemy ciąg $1, -1, 1, -1, \dots$

Uwaga 3. We wzorze (11) zastosowaliśmy tzw. *przekształcenie Abela*. Zapisać je można też w następujący sposób:

$$\begin{aligned} u_1 v_1 + \dots + u_m v_m = u_1(v_1 - v_2) + (u_1 + u_2)(v_2 - v_3) + \dots &+ \\ + (u_1 + \dots + u_{m-1})(v_{m-1} - v_m) + (u_1 + \dots + u_m) v_m&. \end{aligned}$$

3.4. Szeregi o składnikach dodatnich. Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego. Przy założeniu, że wszystkie składniki szeregu $a_1 + a_2 + \dots$ są dodatnie, ciąg jego sum częściowych jest rosnący. Wynika stąd natychmiast twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Szereg o składnikach dodatnich jest bądź zbieżny, bądź rozbieżny do ∞.*

TWIERDZENIE 2 (O PORÓWNYWANIU SZEREGÓW). *Jeśli stale* $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ *i jeśli szereg* $a_1 + a_2 + \dots$ *jest zbieżny, to również zbieżny jest szereg* $b_1 + b_2 + \dots$ *Przy tym*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Niech

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \qquad t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n .$$

Mamy więc $t_n \leqslant s_n$.

Ponieważ zaś (por. tw. 3, § 2.6)

$$s_n \leqslant \lim_{n=\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \text{więc} \qquad t_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Nierówność ta z jednej strony świadczy o tym, że szereg $b_1 + b_2 + \dots$ jest ograniczony, a więc zbieżny (na mocy tw. 1); z drugiej strony pociąga ona nierówność $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (na mocy tw. 3, § 2.6).

Twierdzenie 2 daje często możność dowodzenia w sposób prosty zbieżności szeregu przez porównanie go z szeregiem, którego zbieżność jest wiadoma. Na przykład aby dowieść, że szereg

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \text{ (}^1\text{)} \tag{14}$$

jest zbieżny, porównywamy go z szeregiem

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots, \tag{15}$$

mamy bowiem

$$\frac{1}{2^2} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{3^2} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}, \quad \dots$$

Zarazem zbieżność szeregu (15) wynika natychmiast z tożsamości

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

skąd $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 1$.

Na porównaniu danego szeregu z szeregiem geometrycznym oparte są dwa następujące kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

---

(1) Wykażemy później ((46), § 11.8), że $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

TWIERDZENIE 3 (KRYTERIUM D'ALEMBERTA [1]). *Szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich, czyniących zadość warunkowi*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1, \tag{16}$$

jest zbieżny.

Niech bowiem h spełnia nierówność $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<h<1$. A zatem istnieje k takie, że dla $n\geqslant k$ mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n}<h$, czyli $a_{n+1}<a_nh$. A więc szereg $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots$ ma składniki odpowiednio nie większe od składników szeregu geometrycznego $a_k+a_kh+a_kh^2+\ldots$ Ten ostatni jest zbieżny, bo $0<h<1$. Na mocy twierdzenia 2 jest więc zbieżny szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty}a_n$, a zatem i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

TWIERDZENIE 4 (KRYTERIUM CAUCHY'EGO). *Szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich, czyniących zadość warunkowi*

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}<1, \tag{17}$$

jest zbieżny.

Podobnie jak poprzednio, istnieje takie $h<1$ i takie k, że dla $n\geqslant k$ zachodzi $\sqrt[n]{a_n}<h$, tj. $a_n<h^n$. Porównując szereg $a_k+a_{k+1}+\ldots$ z szeregiem geometrycznym $h^k+h^{k+1}+\ldots$, wnosimy ze zbieżności drugiego o zbieżności pierwszego.

TWIERDZENIE 5 (KRYTERIA ROZBIEŻNOŚCI). *Jeśli szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich czyni zadość jednej z dwóch nierówności*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \quad \textit{lub} \quad \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}>1, \tag{18}$$

to szereg jest rozbieżny.

Jeśli bowiem ma miejsce pierwsza z nierówności (18), to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1, \quad \text{tj.} \quad a_{n+1}>a_n,$$

więc ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0, a co za tym idzie — szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest rozbieżny. Jeśli druga nierówność (18) zachodzi, to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\sqrt[n]{a_n}>1, \quad \text{tj.} \quad a_n>1,$$

i również ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0.

[1] D'Alembert (1717-1783) – słynny matematyk i encyklopedysta francuski.

Uwaga. Zdarzyć się może, że

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1=\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

Kryteria nasze nie dają wówczas możności rozstrzygnięcia, czy szereg dany jest zbieżny czy rozbieżny. Mamy wówczas do czynienia z tzw. wypadkiem „wątpliwym"; mówimy też, że szereg *nie reaguje* na powyższe kryteria.

3.5. Zastosowania i przykłady.

PRZYKŁAD 1. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{n!}$ *dla* $c>0$ *jest zbieżny.*

Istotnie,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{c^{n+1}}{c^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{c}{n+1},\quad \text{skąd}\quad \lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0.$$

Na mocy kryterium d'Alemberta wnioskujemy, że szereg dany jest zbieżny.

PRZYKŁAD 2. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ *jest zbieżny.*

Niech $a_n=\frac{n!}{n^n}$. Stąd

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

A zatem

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

PRZYKŁAD 3. $\lim\limits_{n=\infty}\frac{c^n}{n!}=0=\lim\limits_{n=\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Bo ogólny składnik a_n szeregu zbieżnego jest zbieżny do 0.

Przyjmując jako definicję, że ciąg $\{a_n\}$ rozbieżny do ∞ *szybciej dąży do* ∞ niż ciąg $\{b_n\}$, gdy $\lim\limits_{n=\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$, możemy wzór z przykładu 3 wysłowić w taki sposób: $n!$ szybciej dąży do ∞ niż c^n, a n^n szybciej niż silnia.

PRZYKŁAD 4. *Szereg harmoniczny* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ *nie reaguje na kryterium d'Alemberta. To samo dotyczy szeregu* (14).

Mamy bowiem

$$\lim_{n=\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1.$$

Jak wiemy, pierwszy z wymienionych szeregów jest rozbieżny, a drugi zbieżny.

PRZYKŁAD 5. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x(x-1)\dots(x-n+1)|}{n!}c^n$$

jest zbieżny dla $0<c<1$.

Mamy bowiem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{|x-n|}{n+1}c=\frac{\left|\frac{x}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}}c,$$

skąd $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c$.

Ze zbieżności powyższego szeregu wnosimy, że

PRZYKŁAD 6. $\lim\limits_{n=\infty}\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}c^n=0$ dla $|c|<1$.

PRZYKŁAD 7. *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{c^n}$ *jest zbieżny dla* $c>1$ *(p całkowite). Stąd*

$$\lim_{n=\infty}\frac{n^p}{c^n}=0.$$

Ponieważ

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\cdot\frac{c^n}{c^{n+1}}=\frac{1}{c}<1.$$

PRZYKŁAD 8. Z rozbieżności szeregu harmonicznego i z kryterium Cauchy'ego wynika z łatwością, że $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Ciąg $\sqrt[n]{n}$ jest bowiem dla dostatecznie dużych n malejący i złożony z wyrazów >1. Istnieje więc $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{n}\geqslant 1$. Gdyby przypuścić, że $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{n}>1$, to $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{1/n}<1$ i na mocy kryterium Cauchy'ego wynikałoby, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$ jest zbieżny.

Uwaga. Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta. Jeśli bowiem istnieje granica $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, to istnieje również granica $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}$ (i te granice są sobie równe, por. tw. 4, § 2.11). Może jednak istnieć ta ostatnia granica, mimo że pierwsza nie istnieje.

3.6*. Inne kryteria zbieżności.

TWIERDZENIE 1 (KRYTERIUM KUMMERA [1]). *Na to, żeby szereg $a_1+a_2+\dots$ o składnikach dodatnich był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby istniał taki ciąg liczb dodatnich $b_1, b_2, \dots$, że*

$$\lim_{n=\infty}\left(b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\right)>0. \tag{19}$$

Aby dowieść, że warunek sformułowany w twierdzeniu jest konieczny, załóżmy, że szereg nasz jest zbieżny, i połóżmy $b_n=(s-s_n)/a_n$, gdzie s oznacza sumę szeregu, a s_n jego n-tą sumę częściową. Wówczas

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}=\frac{s-s_n}{a_{n+1}}-\frac{s-s_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}=1.$$

A zatem warunek (19) jest spełniony.

Udowodnimy obecnie, że warunek ten jest dostateczny. Załóżmy w tym celu, że nierówność (19) zachodzi. Istnieje więc takie $h>0$ i taki wskaźnik k, że dla $n\geqslant k$ spełniona jest nierówność

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}>h.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
ha_{k+1}&<b_ka_k-b_{k+1}a_{k+1},\\
ha_{k+2}&<b_{k+1}a_{k+1}-b_{k+2}a_{k+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
ha_n&<b_{n-1}a_{n-1}-b_na_n.
\end{aligned}$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$h(s_n-s_k)<b_ka_k-b_na_n<b_ka_k,\qquad\text{skąd}\qquad s_n<s_k+\frac{b_ka_k}{h}.$$

Ostatnia nierówność dowodzi, że szereg $a_1+a_2+\dots$ jest ograniczony. Szereg ten jest więc zbieżny jako szereg ograniczony o składnikach dodatnich.

---

[1] E. Kummer — matematyk niemiecki XIX wieku, wybitny badacz w dziedzinie teorii liczb.

Jako wniosek z twierdzenia Kummera, otrzymujemy następujące:

TWIERDZENIE 2 (KRYTERIUM RAABEGO). *Szereg $a_1+a_2+\ldots$ o składnikach dodatnich, czyniących zadość warunkowi*

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1, \tag{20}$$

jest zbieżny.

Istotnie, połóżmy $b_n = n$. Należy dowieść, że warunek (20) pociąga za sobą (19). Otóż

$$\lim_{n=\infty}\left(b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\right)=\lim_{n=\infty}\left(n\frac{a_n}{a_{n+1}}-n-1\right)=\lim_{n=\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1>0.$$

3.7. Szeregi bezwzględnie zbieżne. Szereg $a_1+a_2+\ldots$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli szereg $|a_1|+|a_2|+\ldots$ jest zbieżny. Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny, nazywamy *warunkowo zbieżnym*.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest też zbieżny w zwykłym tego słowa znaczeniu. Ponadto*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{21}$$

Zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego należy oszacować wyrażenie $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n$. Otóż

$$|a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n| \leqslant |a_k|+|a_{k+1}|+\ldots+|a_n| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty}|a_i|.$$

Ostatnia zaś suma jako reszta r_{k-1} szeregu zbieżnego dąży do 0, gdy k dąży do ∞ (por. § 3.1). A zatem dla $\varepsilon>0$ istnieje takie k, że $r_{k-1}<\varepsilon$, skąd $|a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n|<\varepsilon$ dla każdego $n>k$.

Zbieżność szeregu $a_1+a_2+\ldots$ jest więc udowodniona. Zarazem przyjmując $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$ oraz $t_n = |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$, mamy $|s_n| \leqslant t_n$, skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$|\lim s_n| = \lim |s_n| \leqslant \lim t_n,$$

tj. wzór (21).

PRZYKŁADY. Szereg geometryczny $a+aq+aq^2+\ldots$, gdzie $|q|<1$, jest zbieżny bezwzględnie, bowiem szereg $|a|+|aq|+|aq^2|+\ldots$ jest zbieżny (por. § 3.1).

Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego x (por. przykład 1, § 3.5; jak okażemy później, jego suma jest równa e^x).

Szereg anharmoniczny (7) jest zbieżny warunkowo, bowiem szereg bezwzględnych wartości jego składników jest rozbieżny (jest to szereg harmoniczny, por. § 3.2).

Zajmiemy się obecnie zagadnieniem *przemienności* szeregów nieskończonych. Jak wiadomo, suma skończonej ilości składników jest przemienna, tj. nie zależy od porządku składników. Wykażemy, że własność ta przenosi się również na szeregi bezwzględnie zbieżne; natomiast nie przenosi się na szeregi warunkowo zbieżne. Wymaga to jednak uprzedniego sprecyzowania, co należy rozumieć przez zmianę porządku składników, gdy ilość tych składników jest nieskończona (biorąc pod uwagę, że niektóre składniki mogą się powtarzać dowolną ilość razy).

Przez *permutację* ciągu liczb naturalnych rozumiemy taki ciąg liczb naturalnych $m_1, m_2, \ldots$, w którym każda liczba naturalna występuje dokładnie jeden raz. Jeśli $m_1, m_2, \ldots$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to mówimy, że szereg $a_{m_1}+a_{m_2}+\ldots+a_{m_n}+\ldots$ powstał z szeregu $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ przez zmianę porządku jego składników.

TWIERDZENIE 2. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest przemienny.*

Inaczej mówiąc, *jeśli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny i jeśli* $m_1, m_2, \ldots$ *jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{22}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Wobec zbieżności szeregu $|a_1|+|a_2|+\ldots$, istnieje takie k, że

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon. \tag{23}$$

Ponieważ ciąg $\{m_n\}$ zawiera wszystkie liczby naturalne, więc istnieje takie r, że wśród liczb $m_1, m_2, \ldots, m_r$ występują liczby $1, 2, 3, \ldots$ aż do k. Ponieważ zaś każda liczba naturalna tylko raz występuje w ciągu $\{m_n\}$, przeto dla każdego $n > r$ mamy $m_n > k$. Jeśli więc przy danym $n > r$ z układu $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots, m_n$ skreślimy liczby $1, 2, \ldots, k$, to pozostaną w nim wyłącznie liczby większe od k (przy tym różne między sobą). A zatem, kładąc

$$s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n \quad \text{i} \quad t_n = a_{m_1}+a_{m_2}+\ldots+a_{m_n}$$

i znosząc w różnicy $t_n - s_n$ składniki o równych wskaźnikach, otrzymamy jako składniki pozostałe jedynie takie składniki, których wskaźniki są większe od k. Wynika stąd (i ze wzoru na bezwzględną wartość sumy), że

$$|t_n - s_n| \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i|, \quad \text{skąd} \quad |t_n - s_n| < \varepsilon$$

na mocy (23). Ponieważ ta ostatnia nierówność zachodzi dla każdego $n > r$, przeto $\lim_{n=\infty} t_n = \lim_{n=\infty} s_n$. Jest to równoznaczne ze wzorem (22).

Uwaga. Twierdzenie poprzednie nie daje się rozciągnąć na dowolne szeregi zbieżne. Na przykład w szeregu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ przedstawmy składniki w następujący sposób:

$$(24)\qquad 1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k_1-1}\right)-\frac{1}{4}+ \\ +\left(\frac{1}{2k_1+1}+\frac{1}{2k_1+3}+\ldots+\frac{1}{2k_2-1}\right)-\frac{1}{6}+\ldots,$$

gdzie liczby $k_1, k_2, \ldots$ są tak dobrane, aby

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k_1-1}>1, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2k_n+1}+\frac{1}{2k_n+3}+\ldots+\frac{1}{2k_{n+1}-1}>1, \ \ldots$$

Wówczas, jak widać natychmiast, szereg (24) jest rozbieżny do ∞. Przyjmując $c = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ (jak wiadomo, $c = \log 2$), można dowieść, że

$$\tfrac{3}{2}c = c+\tfrac{1}{2}c = 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{6}+\ldots$$

Widzimy więc, że przez zmianę porządku składników możemy z szeregu anharmonicznego uzyskać szereg rozbieżny lub też szereg zbieżny do innej granicy. Zachodzi ogólne twierdzenie, którego tu dowodzić nie będziemy:

TWIERDZENIE 3 (RIEMANNA [1]). *Mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zmianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do z góry danej granicy (skończonej lub nieskończonej).*

3.8. Mnożenie szeregów.

TWIERDZENIE 1 (CAUCHY'EGO). *Przy założeniu, że szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są bezwzględnie zbieżne, mamy*

$$(25)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

gdzie

$$(26)\qquad \begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1, \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(tj. suma wskaźników każdego składnika w wierszu n jest $n+1$).

[1] B. Riemann (1826-1866) — słynny z prac z dziedziny geometrii, teorii funkcji analitycznych i teorii liczb.

Przyjmijmy

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n, \quad t_n = b_1 + \ldots + b_n, \quad u_n = c_1 + \ldots + c_n,$$

czyli

$$u_n = a_1 t_n + a_2 t_{n-1} + a_3 t_{n-2} + \ldots + a_n t_1.$$

Należy oszacować różnicę

$$(27) \qquad s_n t_n - u_n = a_1 t_n + a_2 t_n + \ldots + a_n t_n - u_n =$$

$$= a_2(t_n - t_{n-1}) + a_3(t_n - t_{n-2}) + \ldots + a_n(t_n - t_1).$$

Ponieważ szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ są zbieżne, a więc ograniczone, to istnieje taka liczba M, że dla każdego j:

$$(28) \qquad |t_j| < M \quad \text{oraz} \quad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_j| < M.$$

Zarazem dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że warunek $n > m > k$ pociąga za sobą (por. uwaga 2, § 2.7):

$$(29) \qquad |t_n - t_m| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Niech w dalszym ciągu $n > 2k$. Na mocy (27) mamy więc

$$|s_n t_n - u_n| \leqslant (|a_2||t_n - t_{n-1}| + \ldots + |a_k||t_n - t_{n-k+1}|) +$$

$$+ (|a_{k+1}||t_n - t_{n-k}| + \ldots + |a_n||t_n - t_1|).$$

Stosując do pierwszego nawiasu wzór (29), a do drugiego wzór (28), otrzymujemy (biorąc pod uwagę, że $n-k+1 > k$ i $|t_n - t_j| \leqslant |t_n| + |t_j| < 2M$):

$$|s_n t_n - u_n| \leqslant |a_2| + \ldots + |a_k|)\varepsilon + (|a_{k+1}| + \ldots + |a_n|) \cdot 2M < M\varepsilon + \varepsilon \cdot 2M,$$

przy czym ostatnia nierówność jest konsekwencją drugich części wzorów (28) i (29).

Udowodniliśmy więc, że nierówność $|s_n t_n - u_n| < 3M\varepsilon$ zachodzi dla każdego $n > 2k$. Oznacza to, że $\lim(s_n t_n - u_n) = 0$. Ponieważ zaś ciągi $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ są zbieżne, przeto $\lim s_n t_n = \lim s_n \cdot \lim t_n$, skąd otrzymujemy, że $\lim s_n \cdot \lim t_n = \lim s_n t_n = \lim u_n$, tj. wzór (25).

PRZYKŁAD. Udowodnimy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Ponieważ oba szeregi są bezwzględnie zbieżne, możemy stosować wzór (25). Otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1\cdot\frac{y^n}{n!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cdot 1\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(y^n+\frac{n}{1!}xy^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2}+\ldots+x^n\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y+x)^n}{n!}$$

na mocy dwumianu Newtona.

Dodajmy, że wzór, który udowodniliśmy, wynika też z równości $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$ (por. § 3.7).

Uwaga. Twierdzenie jest prawdziwe przy założeniu słabszym, mianowicie, że oba szeregi są zbieżne i że jeden z nich (ale niekoniecznie oba) jest bezwzględnie zbieżny. Istotnie, w dowodzie naszym jedynie interweniowała bezwzględna zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Jeżeli natomiast oba szeregi są warunkowo zbieżne, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ może być rozbieżny. Świadczy o tym następujący przykład:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=b_n;$$

szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ są zbieżne, natomiast, jak łatwo się przekonać, szereg $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ jest rozbieżny.

Dodajmy (bez dowodu) (¹), że jeśli oba szeregi są warunkowo zbieżne, to iloczyn ich otrzymuje się, sumując szereg $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ metodą „pierwszych średnich"; ściślej mówiąc, zachodzi następujące:

TWIERDZENIE 2 (CESÀRY). *Jeżeli szeregi $a_1+a_2+\ldots$ i $b_1+b_2+\ldots$ są zbieżne, to przyjmując $s_n=c_1+c_2+\ldots+c_n$ mamy*

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

3.9*. Iloczyny nieskończone. Obok teorii szeregów nieskończonych, stanowiących uogólnienie dodawania na nieskończoną ilość składników, rozważa się jako drugie działanie nieskończone — iloczyny nieskończone. Ograniczymy się tu do podania ich definicji i kilku ważniejszych własności.

(¹) Por. np. W. Sierpiński, *Działania nieskończone* (§ 84), Warszawa 1948.

Niech dany będzie ciąg nieskończony liczb rzeczywistych różnych od 0: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Utwórzmy ciąg iloczynów

$$p_1 = a_1,\ p_2 = a_1 a_2,\ \ldots,\ p_n = a_1 a_2 \ldots a_n,\ \ldots \tag{30}$$

Jeżeli ciąg (30) jest zbieżny, to granicę jego oznaczamy symbolem

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n=\infty} p_n$$

i nazywamy ją *iloczynem nieskończonym*. Jeżeli ta granica jest różna od 0 (i skończona), to mówimy, że rozważany iloczyn nieskończony jest *zbieżny*.

Czynnikami iloczynu nieskończonego $a_1 a_2 \ldots$ nazywamy liczby $a_1, a_2, \ldots$ *Iloczynami częściowymi* nazywamy wyrazy ciągu (30).

PRZYKŁAD 1. Iloczyn nieskończony

$$(1+\tfrac{1}{1})(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})\ldots$$

jest zbieżny do 1. Istotnie,

$$p_{2n} = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n} = 1, \quad p_{2n+1} = p_{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

A zatem $\lim_{n=\infty} p_n = 1$.

PRZYKŁAD 2. Iloczyn

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty,$$

tzn. rozważany iloczyn nieskończony jest rozbieżny do ∞. Mamy bowiem

$$p_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = n+1, \quad \text{skąd} \quad \lim_{n=\infty} p_n = \infty.$$

PRZYKŁAD 3. Iloczyn

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0,$$

tzn. iloczyn nieskończony jest rozbieżny do 0. Mamy bowiem $p_n = 1/n$.

PRZYKŁAD 4. Iloczyn nieskończony $(-1)(-1)\ldots$ jest rozbieżny, przy tym nie jest rozbieżny ani do 0, ani do nieskończoności. W tym przypadku ciąg iloczynów częściowych oscyluje, przybierając na przemian wartości -1 i $+1$.

Twierdzenie 1 (Warunek Cauchy'ego). *Na to, żeby iloczyn nieskończony $a_1 a_2 \ldots$ (gdzie $a_n \neq 0$) był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba k, że dla każdego $n > k$ zachodzi nierówność*

$$|a_k a_{k+1} \ldots a_n - 1| < \varepsilon. \tag{31}$$

Aby udowodnić, że warunek Cauchy'ego jest konieczny, załóżmy, że rozważany iloczyn nieskończony jest zbieżny, tj. że

$$\lim_{m=\infty} p_m = p \neq 0. \tag{32}$$

Niech $c = \frac{1}{2}|p|$. Istnieje więc takie j, że dla $m > j$ jest $|p_m| > c$.

Niech dana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Na mocy (32) istnieje takie k, że dla $n > k$ mamy $|p_n - p_{k-1}| < c\varepsilon$. Można przy tym założyć, że $k-1 > j$, a zatem, że $|p_{k-1}| > c$. Otrzymujemy więc

$$\left|\frac{p_n}{p_{k-1}} - 1\right| < \frac{c\varepsilon}{|p_{k-1}|} < \varepsilon,$$

tj. nierówność (31).

Udowodniliśmy w ten sposób, że warunek Cauchy'ego jest koniecznym warunkiem zbieżności rozważanego iloczynu nieskończonego. Udowodnimy obecnie, że jest on również dostateczny.

Załóżmy więc, że warunek ten jest spełniony. Udowodnimy przede wszystkim, że ciąg $\{p_n\}$ jest ograniczony.

Podstawiając w warunku Cauchy'ego $\varepsilon = 1$, wnosimy, że istnieje taka liczba r, że dla $n > r$ mamy

$$|a_{r+1} a_{r+2} \ldots a_n - 1| < 1, \quad \text{tj.} \quad \left|\frac{p_n}{p_r} - 1\right| < 1,$$

a więc $|p_n - p_r| < |p_r|$, skąd $|p_n| - |p_r| \leqslant |p_n - p_r| < |p_r|$, a zatem $|p_n| < 2|p_r|$. Stąd wnosimy, że ciąg (30) jest ograniczony.

Niech więc M oznacza liczbę spełniającą warunek $M > |p_n|$ dla każdej liczby naturalnej n. Na mocy (31), do danej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla $n > k$

$$\left|\frac{p_n}{p_{k-1}} - 1\right| < \varepsilon, \tag{33}$$

skąd $|p_n - p_{k-1}| < \varepsilon |p_{k-1}| < \varepsilon M$. Ciąg $\{p_n\}$ jest więc zbieżny. Pozostaje do udowodnienia, że granica jego nie jest równa 0.

Otóż przypuszczając, że $\lim\limits_{n=\infty} p_n = 0$, otrzymalibyśmy ze wzoru (33) (przy stałym k) nierówność $1 \leqslant \varepsilon$, wbrew założeniu, że ε jest dowolną liczbą dodatnią.

Twierdzenie 2. *Jeśli iloczyn nieskończony $a_1 a_2 \ldots$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n=\infty} a_n = 1.$$

Załóżmy bowiem, że $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p \neq 0$. Mamy więc $\lim\limits_{n=\infty} p_{n-1} = p$ i dzieląc przez siebie obie równości otrzymujemy

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} p_n}{\lim\limits_{n=\infty} p_{n-1}} = 1.$$

Zauważmy, że równość $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 1$, która jak dowiedliśmy, jest warunkiem koniecznym zbieżności iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, nie jest jednak warunkiem dostatecznym. Świadczą o tym przykłady 2 i 3.

Ze względu na twierdzenie 2 jest rzeczą celową zapisywać czynniki iloczynu nieskończonego w postaci $a_n = 1 + b_n$. Pozwala to na proste sformułowanie zależności między zbieżnością iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ a zbieżnością szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3. *Przy założeniu, że $b_n > 0$ dla każdego n, iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. To samo dotyczy iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ (przy założeniu dodatkowym, że $b_n < 1$).*

Prosty dowód tego twierdzenia otrzymuje się, opierając się na własnościach funkcji wykładniczej, w szczególności na nierówności $e^x \geqslant 1 + x$, którą udowodnimy w § 8.4 (wzór (16)). Nierówność ta daje natychmiast

$$p_n \leqslant e^{s_n}, \quad \text{gdzie} \quad p_n = (1+b_1)\dots(1+b_n), \quad s_n = b_1 + \dots + b_n.$$

Ponieważ z drugiej strony, jak widać natychmiast, $1 + s_n \leqslant p_n$, wnosimy, że ciągi $\{p_n\}$ i $\{s_n\}$ są bądź oba ograniczone, bądź oba nieograniczone. Ponieważ zaś są to ciągi rosnące, przeto bądź oba są zbieżne, bądź oba rozbieżne. Wreszcie ciąg $\{p_n\}$ nie może być zbieżny do 0, bo $p_n > 1$. Pierwsza część naszego twierdzenia jest więc udowodniona.

Nim przejdziemy do dowodu drugiej części, zauważmy, że jeśli iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ jest zbieżny, to zbieżny jest również iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

Niech bowiem dane będzie $\varepsilon > 0$ i niech k będzie — zgodnie z twierdzeniem 1 — tak dobrane, aby

$$(1+|u_k|)(1+|u_{k+1}|)\dots(1+|u_n|) - 1 < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > k.$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić,

$$|(1+u_k)\dots(1+u_n) - 1| \leqslant (1+|u_k|)\dots(1+|u_n|) - 1,$$

na mocy twierdzenia 1 wnosimy, że iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny. Na mocy pierwszej części naszego twierdzenia zbieżny jest też iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$, a zatem, na mocy przed chwilą udowodnionej uwagi, zbieżny jest również iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$.

Pozostaje do udowodnienia, że zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Niech

$$q_n = (1-b_1)\dots(1-b_n) \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} q_n = q > 0.$$

Ponieważ $q \leqslant q_n \leqslant e^{-s_n}$, tj. $e^{s_n} < 1/q$, przeto ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony, a więc zbieżny.

Iloczyn nieskończony postaci $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, gdy zbieżny jest iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$. Jak przed chwilą dowiedliśmy, bezwzględna zbieżność pociąga za sobą zbieżność w zwykłym sensie. Dowodzi się też, że — podobnie jak dla szeregów — *wartość iloczynu bezwzględnie zbieżnego nie zależy od porządku czynników.*

Zadania

1. Udowodnić prawo łączności szeregów nieskończonych zbieżnych. Podać przykład szeregu rozbieżnego $a_1+a_2+a_3+\dots$ takiego, że szereg $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\dots$ jest zbieżny.

2. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ zaś jest rozbieżny.

3. Podać przykład szeregu naprzemiennego rozbieżnego o składniku ogólnym dążącym do 0.

4. Podać przykład szeregu $a_1+a_2+\dots$ zbieżnego o składnikach dodatnich, dla którego nie istnieje $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5. Dowieść, że jeśli szereg $a_1+a_2+\dots$ o składnikach dodatnich malejących jest zbieżny, to $\lim_{n=\infty} na_n = 0$.

6. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla $s > 1$, a rozbieżny dla $s < 1$.

Wskazówka. Zastosować kryterium Raabego.

7. Dowieść, że jeśli szereg o wyrazach dodatnich $a_1+a_2+\dots$ jest zbieżny, to zbieżne są również szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+k}}.$$

8. Dowieść, że jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ o wyrazach dodatnich malejących jest zbieżny, to również szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny (*twierdzenie Cauchy'ego o zagęszczeniu*).

9. Przyjmując wzory

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \text{oraz} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

sprawdzić wzór $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ stosując twierdzenie o mnożeniu szeregów.

10. Obliczyć iloczyny nieskończone

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right), \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right).$$

11. Zbadać zbieżność iloczynu $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})$.

ROZDZIAŁ II

FUNKCJE

§ 4. Funkcje i ich granice

4.1. Definicje. Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowana jest jakaś liczba $y = f(x)$, to mówimy, że określona jest *funkcja* f na zbiorze liczb rzeczywistych.

Na przykład przyporządkowując liczbie x jej kwadrat $y = x^2$, określiliśmy funkcję: $f(x) = x^2$. Podobnie równość $y = \sin x$ definiuje pewną funkcję na zbiorze liczb rzeczywistych.

Nie każda funkcja określona jest na całym zbiorze liczb rzeczywistych. Na przykład równość $y = 1/x$ określa funkcję na całym zbiorze liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby 0; liczbie 0 bowiem równość ta żadnej liczby rzeczywistej nie przyporządkowuje. Podobnie funkcja $\sqrt{x}$ określona jest tylko dla $x \geqslant 0$; funkcja $\operatorname{tg} x$ określona jest dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od nieparzystych wielokrotności $\pi/2$.

Ogólnie: jeśli każdemu x należącemu do pewnego zbioru przyporządkowana jest liczba $y = f(x)$, to mamy do czynienia z funkcją określoną na tym zbiorze. Zbiór ten nazywamy *zbiorem argumentów* funkcji f. Liczby y postaci $y = f(x)$ nazywamy *wartościami* funkcji f. Na przykład dla funkcji $\sqrt{x}$ zbiorem argumentów jest zbiór liczb $\geqslant 0$; zbiorem wartości tej funkcji jest również zbiór wszystkich liczb $\geqslant 0$ (dodajmy przy tej okazji, że symbol $\pm\sqrt{x}$ nie określa, jako symbol wieloznaczny, żadnej funkcji; funkcja jest w myśl przyjętej przez nas definicji zawsze jednoznaczna).

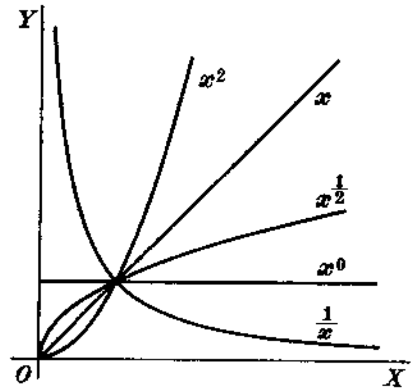
Często mówić będziemy o funkcjach określonych na *przedziale* o *końcach* a i b. Rozróżniać przy tym będziemy przedział *domknięty*, tj. przedział wraz z końcami, czyli zbiór x-ów, czyniących zadość warunkowi $a \leqslant x \leqslant b$, od przedziału *otwartego*, tj. przedziału bez końców, czyli zbioru x-ów takich, że $a < x < b$.

Geometrycznie interpretujemy funkcję f jako zbiór punktów płaszczyzny postaci (x, y), gdzie $y = f(x)$. Zbiór ten nazywamy *wykresem* funkcji f (lub *geometryczną interpretacją* funkcji f, lub *krzywą* $y = f(x)$).

Na przykład wykresem funkcji x^2 jest, jak wiadomo, parabola, wykresem funkcji $1/x$ — hiperbola (por. rys. 2).

Rzutując wykres funkcji na oś X otrzymamy zbiór argumentów funkcji. Rzutując na oś Y otrzymamy zbiór wartości funkcji. Wśród zbiorów położonych na płaszczyźnie wykresy funkcji charakteryzują się tym, że na żadnej prostej równoległej do osi Y nie zawierają dwu różnych punktów.

Dodajmy, że w myśl naszej definicji funkcja, która ma za zbiór argumentów zbiór wszystkich liczb naturalnych, jest to ciąg nieskończony.



Rys. 2

We wszelkich zastosowaniach matematyki mamy do czynienia z funkcjami; mianowicie gdy badamy zależności między jakimiś wielkościami. Na przykład droga s przebyta przez ciało poruszające się ze stałą prędkością v przez czas t wyraża się wzorem $s = vt$; podobnie droga przebyta przez ciało spadające pod wpływem przyciągania ziemskiego jest funkcją czasu, mianowicie $s = \frac{1}{2}gt^2$.

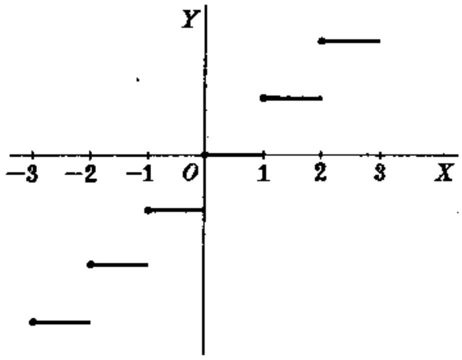
W wyrażeniu $y = f(x)$ zmienną x nazywamy też zmienną *niezależną*, a y zmienną *zależną*. Pamiętać jednak należy, że do funkcji zalicza się również funkcję stałą $y = c$ (piszemy też $y =$ constans); jej wykresem geometrycznym jest prosta równoległa do osi X (lub z nią identyczna).

Funkcje, o których mowa była dotychczas, są to funkcje jednej zmiennej w odróżnieniu od funkcji dwóch lub większej ilości zmiennych. Funkcja jednej zmiennej przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej (należącej do zbioru argumentów) pewną liczbę; funkcja dwóch zmiennych przyporządkowuje parom x, y wartość $f(x, y)$, podobnie funkcja trzech zmiennych przyporządkowuje pewną liczbę $f(x, y, z)$ każdej trójce liczb rzeczywistych.

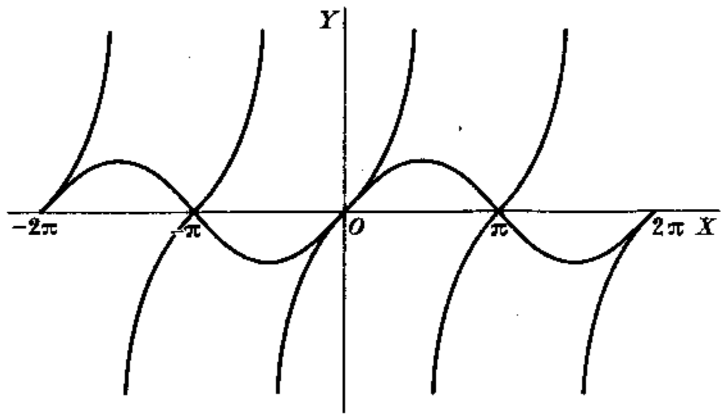
4.2. Funkcje monotoniczne. Jeśli warunek $x < x'$ pociąga za sobą $f(x) < f(x')$, to mówimy, że funkcja f jest *ściśle rosnąca*. Jeśli w ostatniej nierówności znak $<$ zastąpić przez $\leqslant$, to mamy do czynienia z funkcją *rosnącą w szerszym sensie* (czyli z funkcją *niemalejącą*). Podobnie, jeśli warunek $x < x'$ pociąga $f(x) > f(x')$, względnie $f(x) \geqslant f(x')$, mówimy, że funkcja jest *ściśle malejąca*, względnie *malejąca w szerszym sensie* (czyli *nierosnąca*).

Funkcje rosnące i malejące (w węższym lub szerszym sensie) obejmujemy ogólną nazwą funkcji *monotonicznych*.

PRZYKŁADY. Funkcja x^3 jest funkcją ściśle rosnącą. Funcja x^2 jest funkcją malejącą na półprostej $x \leqslant 0$, a rosnącą na półprostej $x \geqslant 0$; na całej osi X nie jest to więc ani funkcja rosnąca, ani malejąca.



Rys. 3



Rys. 4

Przykładem funkcji rosnącej w szerszym sensie (lecz nie ściśle rosnącej) jest funkcja $[x]$. Symbolem tym oznaczamy część całkowitą liczby x, tj. największą liczbę całkowitą n spełniającą nierówność $n \leqslant x$ (por. rys. 3). Funkcja $\sin x$ jest przedziałami monotoniczna (por. uwagę na str. 62): w przedziale $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ jest rosnąca, w przedziale $\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$

malejąca itd. Podobną własność mają funkcje $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ (jak zresztą większość funkcji, z którymi w praktyce się spotykamy).

Zauważmy jeszcze, że wymienione funkcje trygonometryczne posiadają ważną własność okresowości. Funkcję f nazywamy *okresową*, gdy istnieje taka liczba c (zwana *okresem* funkcji), że równość $f(x) = f(x+c)$ zachodzi przy każdej wartości x. Funkcja sinus ma okres 2π, funkcja tangens ma okres π.

Uwaga. Ogólnie mówić będziemy, że funkcja f jest *przedziałami monotoniczna* w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, jeżeli przedział ten można za pomocą skończonego układu punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_0 = a \text{ i } a_n = b,$$

podzielić na przedziały $a_0a_1, a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n$ w taki sposób, aby wewnątrz każdego z tych przedziałów funkcja $f(x)$ była określona i monotoniczna.

Na przykład funkcja określona warunkami: $f(x) = x$ dla $0 < x < 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x-1$ dla $1 < x < 2$, jest przedziałami monotoniczna w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 2$.

4.3. Funkcje różnowartościowe. Funkcje odwrotne. Jeśli funkcja f jest ściśle rosnąca, to równanie $y = f(x)$ wyznacza x jako funkcję y, tj. równanie to daje się rozwiązać ze względu na x (traktowane jako niewiadoma). Istotnie, ponieważ różnym x odpowiadają różne y, więc każdemu y należącemu do zakresu wartości funkcji f odpowiada jedno i tylko jedno x takie, że $f(x) = y$; x jest więc funkcją y. Oznaczając tę funkcję przez g, widzimy więc, że równości

$$y = f(x) \quad \text{i} \quad x = g(y) \tag{1}$$

są równoważne. Funkcję g nazywamy *odwrotną* względem f (oznaczamy ją niekiedy symbolem f^{-1}).

Gdyby zamiast zakładać, że funkcja f jest ściśle rosnąca, założyć, że jest ona ściśle malejąca, to rozumując jak poprzednio, przekonalibyśmy się, że f również posiada funkcję odwrotną. Istnienie funkcji odwrotnej ma bowiem miejsce zawsze, gdy dana funkcja jest *różnowartościowa*, tj. gdy warunek $x \neq x'$ pociąga za sobą $f(x) \neq f(x')$.

Przykłady. Funkcja $y = 2x+3$ posiada funkcję odwrotną. Rozwiązując bowiem to równanie względem x, otrzymujemy $x = \frac{1}{2}(y-3)$.

Funkcja x^2 nie jest różnowartościowa, jeśli rozpatrywać ją na całej osi X, bo $x^2 = (-x)^2$. Jeśli jednak ograniczyć zakres argumentów do półprostej $x \geqslant 0$, to w tym zakresie funkcja x^2 jest różnowartościowa i jej funkcją odwrotną jest $\sqrt{x}$. Podobnie, gdyby ograniczyć zmienność argumentów do półosi ujemnej, otrzymalibyśmy jako funkcję odwrotną $-\sqrt{x}$. Wprawdzie więc funkcja x^2 rozpatrywana na całej osi X

odwrócenia nie posiada, można jednak mówić o różnych „gałęziach" odwrócenia tej funkcji (gdy zakres zmienności jej argumentów odpowiednio ograniczymy).

Geometrycznie charakteryzuje się wykres funkcji różnowartościowej przez fakt, że nie zawiera on na żadnej prostej równoległej do osi X dwu różnych punktów. W myśl podanej w § 4.1 charakteryzacji wykresów funkcji, jest to więc wykres funkcji $x = g(y)$. Aby przejść od tej funkcji do funkcji wyznaczonej przez równanie $y = g(x)$, należy dokonać obrotu wykresu dookoła prostej $y = x$ jako osi.

Zanotujmy łatwe do udowodnienia wzory

$$g\big(f(x)\big) = x, \quad f\big(g(y)\big) = y \tag{2}$$

4.4. Funkcje elementarne. Funkcję postaci

$$ax+b,$$

gdzie a i b oznaczają stałe, nazywamy *liniową*. Wykresem geometrycznym funkcji liniowej jest linia prosta. Odwrotnie, każda prosta, prócz prostych równoległych do osi Y, jest wykresem pewnej funkcji liniowej. W zależności od znaku współczynnika a funkcja $ax+b$ jest rosnąca (dla $a > 0$) lub malejąca (dla $a < 0$); jeśli $a = 0$, funkcja ma stałą wartość b. Jeśli więc $a \neq 0$, to funkcja nasza posiada funkcję odwrotną

$$x = \frac{y-b}{a}.$$

Następną z kolei co do prostoty jest klasa funkcji stopnia drugiego:

$$ax^2+bx+c.$$

Geometrycznie przedstawiają one parabole (o ile $a \neq 0$). Ogólniejszą klasę funkcji przedstawiają *wielomiany*, tj. funkcje postaci

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Dalsze uogólnienie stanowią *funkcje wymierne*, tj. funkcje postaci

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to wielomiany.

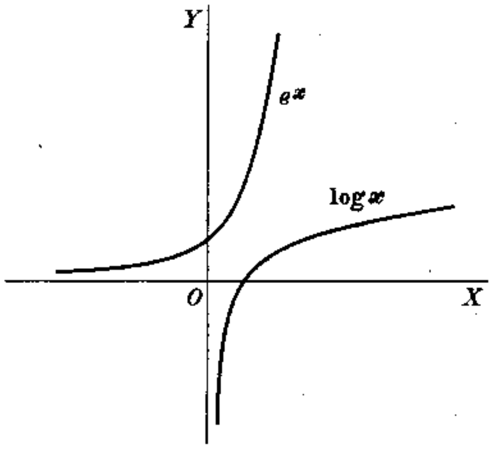
Wielomiany są określone dla wszystkich wartości x. Funkcje wymierne są określone dla wszystkich x prócz tych, dla których mianownik znika, tj. prócz pierwiastków równania $Q(x) = 0$. W obrębie funkcji wymiernych wykonalne są cztery działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie; w obrębie wielomianów — pierwsze trzy.

Funkcją odwrotną do potęgi x^n jest *pierwiastek* $\sqrt[n]{x}$. Funkcja ta dla n nieparzystych określona jest dla wszystkich x, dla n parzystych jedynie dla $x \geqslant 0$.

Pierwiastki są to potęgi postaci $x^{1/n}$. Ogólniej rozpatrujemy potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym x^a dla $x > 0$. Funkcja ta jest rosnąca, jeśli $a > 0$, malejąca, jeśli $a < 0$ (dla $a = 0$ jest to stała) (por. rys. 2).

W szczególności funkcja wymierna $1/x$ geometrycznie przedstawia *hiperbolę równoboczną*.

Jeżeli w potędze traktować jako zmienną wykładnik, jako stałą zaś zasadę, to mamy do czynienia z *funkcją wykładniczą* a^x; przyjmujemy, że $a > 0$. Dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca, dla $a < 1$ — malejąca.



Rys. 5

Funkcją odwrotną względem funkcji wykładniczej jest *logarytm*: warunki $y = \log_a x$ i $x = a^y$ są równoważne (dla $0 < a \neq 1$).

W szczególności funkcją odwrotną względem $y = e^x$, gdzie

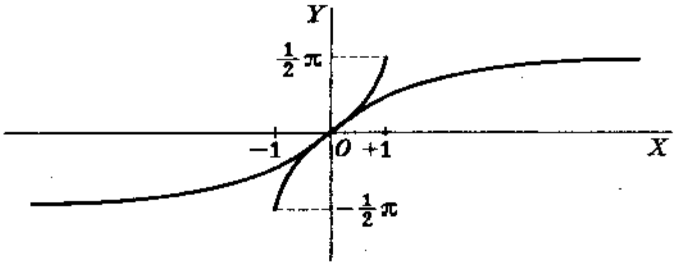
$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(por. § 2.10) jest *logarytm naturalny* $x = \log y$, który piszemy bez uwydatnienia podstawy.

Przez obrót krzywych wykładniczych $y = a^x$ dokoła prostej $y = x$ otrzymujemy krzywe logarytmiczne $y = \log_a x$ (rys. 5, gdzie $a = e$).

Do funkcji elementarnych zaliczamy również funkcje *trygonometryczne* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i funkcje względem nich odwrotne (tj. *cyklometryczne*): $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Ponieważ funkcje sinus, cosinus i tangens nie są różnowartościowe, należy więc przy odwracaniu tych funkcji wskazać przedział, do którego ograniczamy zakres argumentów. Przyjmujemy: dla $\sin x$: $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$; dla $\cos x$: $0 \leqslant x \leqslant \pi$; dla $\operatorname{tg} x$: $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. W każdym z tych przedziałów funkcje rozważane są różnowartościowe, a więc odwracalne. Można by, rzecz prosta, przyjąć inne przedziały zmienności argumentów; otrzymalibyśmy inne gałęzie funkcji odwrotnych.

Zauważmy, że zakresem zmienności argumentów funkcji $\arcsin x$ i $\arccos x$ jest przedział $-1 \leqslant x \leqslant 1$, a dla $\operatorname{arctg} x$ cała oś X (rys. 6).



Rys. 6

Uwaga. Sposób wprowadzenia w wykładzie szkolnym potęgi a^x o wykładniku rzeczywistym niewymiernym opiera się zazwyczaj *implicite* na istnieniu granicy $\lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$, gdzie $\{r_n\}$ jest ciągiem monotonicznym liczb wymiernych zbieżnym do x (np. ciągiem rozwinięć dziesiętnych liczby x). Otóż istnienie tej granicy wynika z twierdzenia o zbieżności ciagów monotonicznych ograniczonych (tw. 3, § 2.6) oraz ze znanego z elementarnej algebry twierdzenia o monotoniczności funkcji a^r dla r wymiernych.

Równość $a^x = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n} (a > 0)$ uważamy za definicję potęgi dla wykładników niewymiernych. Obojętne jest przy tym, jaki ciąg liczb wymiernych zbieżny do x oznaczymy przez $\{r_n\}$. Jeśli bowiem $\lim\limits_{n=\infty} r_n' = \lim\limits_{n=\infty} r_n$, to (por. przykład 6, § 2.9) $\lim\limits_{n=\infty} a^{r_n'-r_n} = 1$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} a^{r_n'} = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n} \cdot \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n'-r_n} = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$.

Następujące wzory znane z algebry elementarnej dla wykładników wymiernych zachodzą dla dowolnych wykładników rzeczywistych (przy $a > 0$):

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}. \tag{3}$$

Kładąc $x = \lim\limits_{n=\infty} r_n$, $y = \lim\limits_{n=\infty} s_n$ i stosując powyższe wzory do wykładników wymiernych r_n i s_n, przeprowadzamy dowód przez przejście do granicy.

4.5. Granica funkcji f w punkcie a. Liczbę g nazywamy *granicą funkcji f w punkcie a*, co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x=a} f(x) = g,$$

jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a i o wyrazach różnych od a zachodzi równość $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$.

A zatem granica funkcji f w punkcie a istnieje, gdy istnieje wspólna granica wszystkich ciągów $f(x_1), f(x_2), \ldots$ takich, że

$$\lim_{n=\infty} x_n = a \quad \text{oraz} \quad x_n \neq a \quad \text{dla każdego } n.$$

Na przykład $\lim_{x=0} x^2 = 0$; jeśli bowiem $\lim_{n=\infty} x_n = 0$, to

$$\lim_{n=\infty} x_n^2 = (\lim_{n=\infty} x_n)^2 = 0.$$

Podobnie $\lim_{x=0} \cos x = 1$. Istotnie,

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}x,$$

a na mocy znanego wzoru $|\sin t| \leqslant |t|$, a więc

$$|1 - \cos x| \leqslant \tfrac{1}{2}x^2,$$

skąd

$$\lim_{x=0} (1 - \cos x) = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{x=0} \cos x = 1.$$

Łatwo też dowieść, że

(4) $$\lim_{x=0} a^x = 1 \quad (a > 0).$$

Jeśli funkcja f jest określona nie dla wszystkich liczb rzeczywistych, to o x_n zakładamy, że należy do argumentów tej funkcji; natomiast o liczbie a tego założenia nie czynimy (zakładamy jedynie, że a jest granicą jakiegoś ciągu argumentów różnych od a). Na przykład funkcja $\dfrac{\sin x}{x}$ nie jest określona dla $x = 0$, istnieje jednak w tym punkcie granica tej funkcji, mianowicie

(5) $$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Istotnie, dla $\frac{1}{2}\pi > x > 0$ mamy

(6) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

a więc $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ (pierwszą z tych nierówności otrzymujemy mnożąc drugą nierówność (6) przez $\dfrac{\cos x}{x}$, a drugą otrzymujemy dzieląc pierwszą z nierówności (6) przez x). Ponieważ zaś $\lim\limits_{x=0}\cos x = 1$, z łatwością stąd wnosimy, że jeśli $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$ oraz $x_n > 0$, to $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = 1$ (por. (17), § 25). Wreszcie założenie $x > 0$ można zastąpić przez $x < 0$, bowiem $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$.

Symbolu $\lim\limits_{x=a} f(x)$ używamy również na oznaczenie *granicy niewłaściwej*; np. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$. Natomiast $\lim\limits_{x=0}\dfrac{1}{x}$ nie istnieje, bowiem dla ciągów $\{x_n\}$ zmierzających do 0 wartościami dodatnimi $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{x_n} = \infty$, a dla ciągów o wyrazach ujemnych mamy $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{x_n} = -\infty$.

Można jednak w tym wypadku mówić o granicy *jednostronnej* w punkcie 0. Mianowicie, liczbę g nazywamy *prawostronną* (względnie *lewostronną*) *granicą* funkcji f w punkcie a, jeśli warunki $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n > a$ (względnie $x_n < a$) pociągają za sobą $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$. Symbole

$$\lim_{x=a+0} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x=a-0} f(x)$$

oznaczają odpowiednio prawostronną i lewostronną granicę funkcji f w punkcie a.

Mamy więc

$$\lim_{x=+0}\frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x=-0}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Podobnie,

$$\lim_{x=+0}\log x = -\infty, \quad \lim_{x=\frac{1}{2}\pi-0}\operatorname{tg} x = \infty, \quad \lim_{x=\frac{1}{2}\pi+0}\operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x=n-0}[x] = n-1. \tag{7}$$

Istnieją jednak funkcje, które nie posiadają nawet jednostronnych granic (ani właściwych, ani niewłaściwych). Taką jest np. funkcja (rys. 7)

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \tag{8}$$

W punkcie 0 nie posiada ona jednostronnej granicy. Istotnie w punktach $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi+2\pi$, $\frac{1}{2}\pi+4\pi$, ..., $\frac{1}{2}\pi+2n\pi$ sinus ma wartość 1, a więc przyjmując

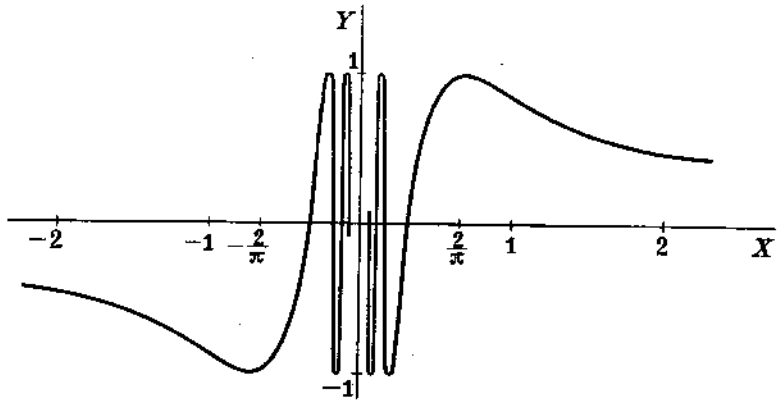
$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

mamy $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = 1$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$. Zarazem dla

$$x_n' = \frac{2}{(4n+3)\pi}$$

mamy $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = -1$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} x'_n = 0$. Nie istnieje więc granica prawostronna funkcji f w punkcie 0; podobnie nie istnieje granica lewostronna w tym punkcie.

Inny przykład funkcji osobliwej stanowi funkcja, która w punktach wymiernych ma wartość 1, w punktach zaś niewymiernych wartość 0 (tzw. *funkcja Lejeune-Dirichleta* (1)). Nie posiada ona w żadnym punkcie żadnej z granic jednostronnych.



Rys. 7

Prócz granicy funkcji w punkcie a skończonym, rozważamy też granicę w nieskończoności. Mianowicie, przez $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ oznaczamy wspólną granicę ciągów $f(x_1), f(x_2), \ldots$ takich, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \infty$ (o ile taka wspólna granica istnieje). Mamy więc na przykład

$$(9) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x=\infty} e^x = \infty = \lim_{x=\infty} \log x, \quad \lim_{x=-\infty} e^x = 0.$$

Funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens nie posiadają granicy w $\pm\infty$.

4.6. Działania na granicy. Przy założeniu, że granice $\lim\limits_{x=a} f(x)$ i $\lim\limits_{x=a} g(x)$ istnieją (i są skończone), zachodzą wzory:

$$(10) \qquad \lim_{x=a} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x=a} f(x) + \lim_{x=a} g(x),$$

$$(11) \qquad \lim_{x=a} \big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x=a} f(x) - \lim_{x=a} g(x),$$

(1) P. Lejeune-Dirichlet (1805-1859) — matematyk niemiecki.

(12) $$\lim_{x=a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x=a} f(x) \lim_{x=a} g(x),$$

(13) $$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x=a} f(x)}{\lim\limits_{x=a} g(x)}, \quad \text{o ile} \quad \lim_{x=a} g(x) \neq 0.$$

Wzory powyższe pozostają w mocy, gdy zastąpić a przez ∞ lub $-\infty$. Pozostają one również w mocy dla granic jednostronnych.

Wzory te są konsekwencjami odpowiednich wzorów dla ciągów nieskończonych ((6)-(9), § 2.4). Dla przykładu udowodnimy wzór (13).

Niech więc

$$\lim_{x=a} f(x) = A, \quad \lim_{x=a} g(x) = B \neq 0.$$

Niech $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, przy czym $x_n \neq a$. Mamy więc

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n=\infty} g(x_n) = B.$$

Na mocy wzoru o ilorazie granic ((9), § 2.4), wnosimy stąd, że

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n=\infty} g(x_n)},$$

skąd wynika wzór (13).

Podobnie ze wzorów (15) i (17) z § 2 wnosimy, że jeśli granice $\lim\limits_{x=a} f(x)$ i $\lim\limits_{x=a} g(x)$ istnieją, to

(14) *nierówność* $f(x) \leqslant g(x)$ *pociąga za sobą* $\lim\limits_{x=a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x=a} g(x)$,

(15) *nierówność* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *wraz z równością* $\lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} g(x)$ *pociągają za sobą* $\lim\limits_{x=a} h(x) = \lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} g(x)$.

Przy tym, jak poprzednio, wzory te obowiązują dla $a = \pm\infty$ i dla granic jednostronnych.

Zachodzi następujący wzór na superpozycję funkcji:

(16) *jeśli* $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ *i* $\lim\limits_{y=A} g(y) = B$, *to* $\lim\limits_{x=a} g\big(f(x)\big) = B$

przy założeniu, że funkcja f nie przyjmuje wartości A w otoczeniu punktu a (tzn. w jakimś przedziale otwartym, zawierającym punkt a).

Wzór ten pozostaje w mocy zarówno dla nieskończonych wartości A, B i a, jak również dla granic jednostronnych, gdy umówimy się, że równość $\lim\limits_{x=a} f(x) = A+0$ oznacza, że $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ oraz że $f(x) > A$ w otoczeniu a (analogiczna umowa dotyczy symbolu $A-0$ oraz granicy jednostronnej).

Niech bowiem $\lim_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Mamy więc $\lim_{n=\infty} f(x_n) = A$. Połóżmy $y_n = f(x_n)$. Ponieważ w pewnym przedziale zawierającym punkt a wewnątrz funkcja f nie przyjmuje wartości A, więc dla dostatecznie dużych n mamy $f(x_n) \neq A$, tj. $y_n \neq A$. A zatem $\lim_{n=\infty} g(y_n) = B$, czyli $\lim_{n=\infty} g(f(x_n)) = B$. Wnosimy stąd, że $\lim_{x=a} g(f(x)) = B$.

W szczególności zachodzi następujący wzór, który pozwala sprowadzić obliczanie granic w nieskończoności do granic w skończoności:

(17) $$\textit{jeśli } \lim_{x=+0} f(1/x) \textit{ istnieje, to } \lim_{t=\infty} f(t) = \lim_{x=+0} f(1/x).$$

Istotnie, podstawiając $x = 1/t$, mamy $\lim_{t=\infty}(1/t) = +0$, skąd otrzymujemy wzór (17) na mocy poprzedniego (przyjmując $a = \infty$ i $A = +0$).

Zachodzi też, jak łatwo sprawdzić, zależność odwrotna:

(18) $$\textit{jeśli } \lim_{t=\infty} f(t) \textit{ istnieje, to } \lim_{x=+0} f(1/x) = \lim_{t=\infty} f(t).$$

Przykład 1. Następujący wzór ma ważne zastosowanie w rachunku różniczkowym:

(19) $$\lim_{x=0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Aby wzór ten wyprowadzić, rozważymy dwa wypadki:

1° $x > 0$. Oznaczmy $y = 1/x$. Zgodnie ze wzorem (18), należy dowieść, że

(20) $$\lim_{y=\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Niech więc $\lim_{n=\infty} y_n = \infty$. Przyjmijmy $k_n = [y_n]$, to znaczy że k_n jest liczbą naturalną, spełniającą podwójną nierówność

(21) $$k_n \leqslant y_n < k_n+1.$$

Stąd

$$\frac{1}{k_n+1} \leqslant \frac{1}{y_n} \leqslant \frac{1}{k_n} \quad (\text{dla } y_n \geqslant 1),$$

a więc

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1},$$

czyli

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \frac{1}{1+\dfrac{1}{k_n+1}} \leqslant \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Ponieważ $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$ i $k_n > y_n - 1$, więc $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \infty$. Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, wnosimy stąd (por. zad. 5, § 2), że $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$. Wreszcie, ponieważ

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k_n+1}} = 1 = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right),$$

to na mocy wzoru o podwójnej nierówności ((17), § 2.5) otrzymujemy:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e.$$

Tym samym wzór (20), a zatem i (19) został udowodniony dla $x > 0$.

2° Niech $x < 0$. Przyjmując $y = 1/x$, mamy

$$\lim_{x=-0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x=+0}(1-x)^{-1/x} = \frac{1}{\lim\limits_{y=\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^y}.$$

Pozostaje więc do udowodnienia, że

$$\lim_{y=\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^y = \frac{1}{e}. \tag{22}$$

Niech $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$. Wzór (21) daje

$$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \leqslant \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{k_n+1} \leqslant \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqslant \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{y_n} \leqslant \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ (por. (26), § 2.10), przeto rozumując jak poprzednio, otrzymujemy

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = \frac{1}{e}.$$

Wzór (22) jest więc udowodniony.

Przykład 2. $\lim\limits_{x=\infty}\frac{e^x}{x} = \infty$, tzn. że funkcja e^x szybciej rośnie niż x.

Niech bowiem $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \infty$. Niech, jak poprzednio, $k_n = [x_n]$. A zatem dla $x_n > 1$:

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} \geqslant \frac{e^{k_n}}{k_n+1} \geqslant \frac{e^{k_n}}{2k_n}.$$

Ponieważ (przykład 7, § 3.5) $\lim\limits_{n=\infty}\frac{e^n}{n} = \infty$ i $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \infty$, więc $\lim\limits_{n=\infty}\frac{e^{k_n}}{k_n} = \infty$, a zatem $\lim\limits_{n=\infty}\frac{e^{x_n}}{x_n} = \infty$. Stąd wzór żądany.

PRZYKŁAD 3. $\lim\limits_{x=\infty}\frac{x}{\log x}=\infty$.

Ponieważ $x=e^{\log x}$ oraz $\lim\limits_{x=\infty}\log x=\infty$, więc podstawiając $y=\log x$, mamy (por. (16)):

$$\lim_{x=\infty}\frac{x}{\log x}=\lim_{x=\infty}\frac{e^{\log x}}{\log x}=\lim_{y=\infty}\frac{e^y}{y}=\infty.$$

PRZYKŁAD 4. $\lim\limits_{x=+0}(x\log x)=0$.

Mamy bowiem

$$\lim_{x=+0}(x\log x)=\lim_{t=\infty}\frac{\log\frac{1}{t}}{t}=-\lim_{t=\infty}\frac{\log t}{t}=0.$$

4.7. Warunki istnienia granicy. Odpowiednikiem twierdzenia o zbieżności ciągów monotonicznych ograniczonych jest twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE 1. *Jeśli funkcja f jest rosnąca (w szerszym sensie) i ograniczona z góry, to istnieje $\lim\limits_{x=a-0}f(x)$ w każdym punkcie a.*

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji *malejących*.

Przez funkcję *ograniczoną z góry* (względnie *z dołu*) rozumiemy funkcję, której zbiór wartości jest ograniczony z góry (z dołu), tj. dla której istnieje liczba M taka, że nierówność $M>f(x)$ (względnie $M<f(x)$) zachodzi dla każdego x.

Dowód. Ponieważ ciąg $\left\{a-\frac{1}{n}\right\}$ jest rosnący, więc i ciąg $\left\{f\left(a-\frac{1}{n}\right)\right\}$ jest rosnący. Ponieważ ten ostatni ciąg jest ponadto ograniczony, a zatem jest zbieżny. Niech

$$\lim_{n=\infty}f\left(a-\frac{1}{n}\right)=g.$$

Pozostaje do udowodnienia, że warunki $\lim\limits_{n=\infty}x_n=a$ i $x_n<a$ pociągają za sobą równość

$$\lim_{n=\infty}f(x_n)=g.$$

Niech dane będzie $\varepsilon>0$. Istnieje więc takie m, że $g-f\left(a-\frac{1}{m}\right)<\varepsilon$. Do m dobieramy takie k, ażeby nierówność $n>k$ pociągała za sobą $a-\frac{1}{m}<x_n$. Stąd

$$f\left(a-\frac{1}{m}\right)<f(x_n),$$

a więc

$$g-f(x_n)<g-f\left(a-\frac{1}{m}\right)<\varepsilon.$$

Zarazem dla każdego n istnieje r_n takie, że $x_n < a - \frac{1}{r_n}$. Stąd

$$f(x_n) < f\left(a - \frac{1}{r_n}\right) \leqslant g, \quad \text{więc} \quad g - f(x_n) > 0.$$

Wnosimy stąd, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$.

Uwaga 1. Twierdzenie 1 daje się uogólnić zarówno na funkcje monotoniczne nieograniczone, jak i na $a = \pm\infty$. Może być ono również zapisane w następującej, nieco ogólniejszej, postaci:

Jeżeli funkcja f jest monotoniczna (w szerszym sensie) i ograniczona, to granice $\lim\limits_{x=a\pm 0} f(x)$ *istnieją w każdym punkcie a.*

Dowód jest całkowicie analogiczny.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli funkcja f nie posiada granicy (skończonej) w punkcie a, to istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ oraz ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny.*

Przypuśćmy bowiem, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ tego rodzaju ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny. Ponieważ funkcja f nie posiada granicy w punkcie a, więc istnieć muszą dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{x'_n\}$, czyniące zadość naszym założeniom i takie, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n=\infty} f(x'_n)$. Weźmy pod uwagę ciąg $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$ Ciąg ten jest zbieżny do a, składa się z samych wyrazów różnych od a, zarazem ciąg $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots$ jest rozbieżny.

Twierdzenie następujące zawiera tzw. *definicję Cauchy'ego* granicy funkcji w punkcie.

TWIERDZENIE 3. *Na to, żeby zachodziła równość* $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$, *potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że nierówność $0 < |x-a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \varepsilon$.*

Przypuśćmy najpierw, że warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, tj. że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że przy każdej wartości na $\delta > 0$ istnieje takie x, że

$$0 < |x-a| < \delta, \quad \text{a} \quad |f(x) - g| \geqslant \varepsilon.$$

W szczególności więc, podstawiając $\delta = 1/n$, wnosimy, że istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \tag{23}$$

oraz

$$|f(x_n) - g| \geqslant \varepsilon. \tag{24}$$

Z nierówności (23) wynika, że $\lim_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Gdyby więc przypuścić, że $\lim_{x=a} f(x) = g$, to mielibyśmy $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$. Lecz ta ostatnia równość jest sprzeczna z nierównością (24).

Udowodniliśmy w ten sposób, że warunek Cauchy'ego jest koniecznym warunkiem zachodzenia równości $\lim_{x=a} f(x) = g$.

Udowodnimy obecnie, że jest to również warunek wystarczający.

Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$ i niech $\lim_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Na mocy warunku Cauchy'ego istnieje $\delta > 0$ takie, że nierówność $0 < |x_n - a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Ze względu na równość $\lim_{n=\infty} x_n = a$, nierówność $|x_n - a| < \delta$ zachodzi dla wszystkich n, poczynając od pewnego k. Dla tych samych n mamy więc nierówność $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Znaczy to, że $\lim_{n=\infty} f(x_n) = g$. Stąd wnosimy, że $\lim_{x=a} f(x) = g$.

Odpowiednikiem twierdzenia Cauchy'ego z teorii ciągów (§ 2.7) jest

TWIERDZENIE 4. *Na to, żeby istniała granica (skończona) funkcji f w punkcie a, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że warunki*

(25) $$0 < |x - a| < \delta \quad i \quad 0 < |x' - a| < \delta$$

pociągają za sobą $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Istotnie, warunek nasz jest konieczny, bo jeśli $\lim_{x=a} f(x) = g$, to dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że warunek $0 < |x - a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Jeśli więc warunki (25) są spełnione, to zachodzą nierówności

$$|f(x) - g| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{i} \quad |f(x') - g| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Warunek jest dostateczny. Przypuśćmy bowiem, że granica funkcji f w punkcie a nie istnieje. Istnieje wówczas na mocy twierdzenia 2 taki ciąg $\{x_n\}$, że $\lim_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ oraz że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny. Załóżmy zarazem, że warunek sformułowany w twierdzeniu jest spełniony. Ponieważ z równości $\lim_{n=\infty} x_n = a$ wynika, że istnieje takie k, że dla $n \geqslant k$ można w nierównościach (25) podstawić $x = x_n$ i $x' = x_k$, przeto $|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$. Na mocy twierdzenia Cauchy'ego o ciągach wnosimy stąd, że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny — wbrew naszemu założeniu.

Uwaga 2. Dla $a = \infty$ twierdzenia 3 i 4 dają się sformułować, jak następuje:

TWIERDZENIE 3'. *Na to, żeby zachodziła równość $\lim_{x=\infty} f(x) = g$, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie r, że nierówność $x > r$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \varepsilon$.*

TWIERDZENIE 4'. *Na to, żeby istniała granica (skończona)* $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$, *potrzeba i wystarcza, aby dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istniało takie* r, *że warunki* $x > r$ *i* $x' > r$ *pociągają za sobą* $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$.

Dowody tych twierdzeń są zupełnie analogiczne do dowodów twierdzeń 3 i 4.

Zadania

1. Podać wykresy funkcji

$$\frac{x}{x+1},\quad x-[x],\quad x\sin\frac{1}{x},\quad x^2\sin\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

i obliczyć granice tych funkcji w punkcie 0.

2. Znaleźć granicę wielomianu w nieskończoności, tj.

$$\lim_{x=\pm\infty}(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0)$$

Wskazówka. Oddzielnie rozważać n parzyste i nieparzyste.

3. Obliczyć:

$$\lim_{x=0}\frac{\sin ax}{x},\quad \lim_{x=1}\frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

4. Niech dana będzie funkcja ograniczona f w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Podzielmy ten przedział na skończoną ilość przedziałów za pomocą punktów $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ (przy czym $a_0 = a$, $a_n = b$) i weźmy pod uwagę sumę

$$s = |f(a_1)-f(a_0)|+|f(a_2)-f(a_1)|+\ldots+|f(a_n)-f(a_{n-1})|.$$

Jeśli zbiór liczb s odpowiadających wszelkim możliwym podziałom przedziału ab jest ograniczony, to funkcję f nazywamy *o wahaniu ograniczonym*.

Udowodnić, że: suma dwóch funkcji o wahaniu ograniczonym jest funkcją o wahaniu ograniczonym; funkcja monotoniczna jest funkcją o wahaniu ograniczonym.

5. Dowieść, że jeśli funkcja f, ograniczona w każdym skończonym przedziale, czyni zadość warunkowi $\lim\limits_{x=\infty}(f(x+1)-f(x)) = g$, to $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{f(x)}{x} = g$.

6. Udowodnić, że wzór

$$f(x) = \lim_{n=\infty}\lim_{k=\infty}(\cos n!\pi x)^{2k}$$

przedstawia funkcję Dirichleta rozważaną w § 4.5.

7. Funkcję f nazywamy funkcją *parzystą*, jeśli spełniony jest warunek $f(x) = f(-x)$ dla każdego x. Analogicznie, jeśli spełniony jest warunek $f(x) = -f(-x)$, to funkcję f nazywamy *nieparzystą*.

Podać przykłady funkcji parzystych i nieparzystych w obrębie funkcji trygonometrycznych.

Scharakteryzować parzystość i nieparzystość funkcji za pomocą warunków geometrycznych.

8. Udowodnić, że każda funkcja jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej.

Wskazówka. Zauważyć, że funkcja $g(x) = f(x)+f(-x)$ jest parzysta.

§ 5. Funkcje ciągłe

5.1. Definicje. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a, jeśli spełniony jest warunek

(1) $$f(a) = \lim_{x=a} f(x).$$

Na mocy definicji symbolu $\lim\limits_{x=a} f(x)$ oznacza to, że równość $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ pociąga za sobą równość $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = f(a)$. (Założenie, że $x_n \neq a$, możemy tu oczywiście pominąć).

Jeśli więc funkcja f jest ciągła w punkcie a, to

(2) $$f(\lim_{n=\infty} x_n) = \lim_{n=\infty} f(x_n), \quad \text{o ile} \quad \lim_{n=\infty} x_n = a.$$

Jeżeli w równości (1) zastąpić granicę przez granicę jednostronną, to otrzymamy definicję *ciągłości jednostronnej*. Mianowicie, funkcja f jest prawostronnie, względnie lewostronnie ciągła w punkcie a, jeżeli

$$f(a) = \lim_{x=a+0} f(x), \quad \text{względnie} \quad f(a) = \lim_{x=a-0} f(x).$$

Jeżeli funkcja f określona jest nie dla wszystkich x, to w powyższych definicjach ograniczamy, rzecz jasna, zmienność x do zbioru argumentów funkcji f. Jeśli np. zbiorem argumentów funkcji f jest przedział domknięty $a \leqslant x \leqslant b$, to ciągłość funkcji f w punkcie a oznacza to samo, co jej ciągłość prawostronna.

Funkcję ciągłą dla każdej wartości argumentu nazywamy krótko *funkcją ciągłą*. W szczególności więc funkcja ciągła określona w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ jest to funkcja ciągła dla każdego punktu położonego wewnątrz tego przedziału, a prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b.

Mówić też będziemy, że funkcja f jest *przedziałami ciągła* w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, jeśli przedział ten można podzielić za pomocą skończonego układu punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_0 = a \quad \text{i} \quad a_n = b,$$

na przedziały $a_{k-1}\,a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, w taki sposób, że wewnątrz każdego z tych przedziałów funkcja f jest ciągła i że istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x=a_{k-1}+0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x=a_k-0} f(x)$; tzn. jeśli dla każdego k funkcja $f_k(x)$ określona warunkami

$$f_k(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad a_{k-1} < x < a_k$$

oraz

$$f_k(a_{k-1}) = f(a_{k-1}+0), \quad f_k(a_k) = f(a_k-0),$$

jest ciągła w przedziale $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k$.

Funkcja posiadająca skończoną ilość punktów nieciągłości, w których jednak istnieją obie granice jednostronne, jest więc funkcją przedziałami ciągłą.

PRZYKŁADY. Jak dowiedliśmy w § 4.5, $\lim\limits_{x=0} x^2 = 0$. Oznacza to, że funkcja x^2 jest ciągła w punkcie 0 (łatwo zresztą się przekonać, że jest to funkcja w każdym punkcie ciągła). Podobnie równość $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1 = \cos 0$ oznacza, że funkcja cosinus jest ciągła w punkcie 0.

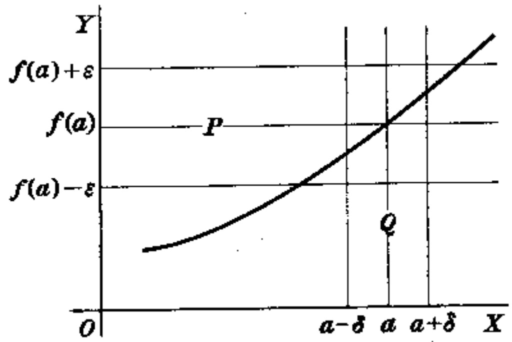
Funkcja $[x]$ jest nieciągła w punktach całkowitych; mówiąc dokładniej: jest ciągła prawostronnie w tych punktach, lecz nie lewostronnie.

Funkcja $\sin(1/x)$ jest nieciągła w punkcie 0 niezależnie od tego, jaką wartość nadamy jej w tym punkcie. Nie istnieje bowiem granica tej funkcji w punkcie 0. Funkcja Dirichleta (por. § 4.5) jest nieciągła w każdym punkcie.

Pojęcie ciągłości funkcji można również rozciągnąć na punkty w nieskończoności, rozumiejąc przez funkcję ciągłą w ∞ funkcję f, dla której istnieje granica $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$.

5.2. Charakteryzacja ciągłości Cauchy'ego. Interpretacja geometryczna. Następujące twierdzenie może być przyjęte jako definicja ciągłości (*definicja Cauchy'ego* w odróżnieniu od przyjętej przez nas w § 5.1 *definicji Heinego*). Wynika ono bezpośrednio z twierdzenia 3, § 4.7.

Na to, żeby funkcja f była ciągła w punkcie a, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że nierówność $|x-a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.



Rys. 8

Wyrażając się bardziej obrazowo, oznacza to, że dostatecznie małym przyrostom zmiennej niezależnej odpowiadają dowolnie małe przyrosty zmiennej zależnej. Zapisać to można, jak następuje:

(3) *warunek* $|h| < \delta$ *pociąga za sobą* $|f(a+h)-f(a)| < \varepsilon$.

Geometrycznie ciągłość funkcji f w punkcie a oznacza, co następuje: niech P oznacza pas równoległy do osi X i zawierający prostą $y = f(a)$ wewnątrz; istnieje wówczas taki pas Q równoległy do osi Y i zawierający prostą $x = a$ wewnątrz, że część krzywej danej równaniem $y = f(x)$, znajdująca się w pasie Q, mieści się równocześnie w pasie P (rys. 8).

Przejście od definicji analitycznej opartej na warunku Cauchy'ego do powyższej definicji geometrycznej uzyskamy natychmiast, przyjmując, że pas P jest wyznaczony przez proste $y = f(a) \pm \varepsilon$, a pas Q przez proste $x = a \pm \delta$.

Jak widać z powyższych definicji, ciągłość funkcji f w punkcie a jest własnością *lokalną* w tym sensie, że zależy od zachowania się funkcji w otoczeniu punktu a. Na to, aby się przekonać, czy funkcja f jest ciągła w punkcie a, wystarczy znać tę funkcję w dowolnie małym przedziale zawierającym punkt a wewnątrz.

5.3. Ciągłość funkcji elementarnych. Ze wzorów na działania na granicach funkcji (por. (10)-(13), § 4.6) wynika natychmiast, że *działania arytmetyczne wykonane na funkcjach ciągłych dają w wyniku funkcje ciągłe*. Ściślej mówiąc: *jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie a, to suma, różnica, iloczyn i iloraz (o ile $g(a) \neq 0$) tych funkcji są również w tym punkcie ciągłe.*

Na przykład przy założeniu, że $\lim\limits_{x=a} f(x) = f(a)$ i $\lim\limits_{x=a} g(x) = g(a)$, mamy

$$\lim_{x=a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x=a} f(x) \lim_{x=a} g(x) = f(a)g(a),$$

co oznacza, że funkcja $f(x)g(x)$ jest ciągła w punkcie a.

Wynika stąd, że *wielomian jest funkcją ciągłą*.

Funkcja bowiem stała $f(x) = \text{const}$ i funkcja $f(x) = x$ (identyczność) są, jak widać natychmiast, funkcjami ciągłymi.

Ogólniej: *każda funkcja wymierna, tj. funkcja postaci* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to wielomiany, jest funkcją ciągłą* (oczywiście w punktach, w których jest określona, tj. wszędzie poza pierwiastkami mianownika).

Nim przejdziemy do dowodu ciągłości innych funkcji elementarnych, zauważmy, że w myśl wzoru (1) ciągłość funkcji f w punkcie x oznacza, że $\lim\limits_{h=0} f(x+h) = f(x)$, tj. że

$$\lim_{h=0}\big(f(x+h) - f(x)\big) = 0. \tag{4}$$

Udowodnimy obecnie, że *funkcja wykładnicza a^x $(a > 0)$ jest ciągła*.

Istotnie, mamy $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$ oraz $\lim\limits_{h=0} a^h = 1$ (por. (4), § 4.5). Stąd $\lim\limits_{h=0}(a^{x+h} - a^x) = 0$, co zgodnie ze wzorem (4) oznacza, że funkcja a^x jest ciągła.

Funkcje trygonometryczne sinus *i* cosinus *są ciągłe*.

Istotnie,

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x+\tfrac{1}{2}h).$$

Ponieważ zaś $|\sin t| \leqslant |t|$ i $|\cos t| \leqslant 1$, więc

$$|\sin(x+h)-\sin x| \leqslant |h|, \quad \text{skąd} \quad \lim_{h=0}|\sin(x+h)-\sin x| = 0,$$

tj.

$$\lim_{h=0}\big(\sin(x+h)-\sin x\big) = 0.$$

Podobnie

$$|\cos(x+h)-\cos x| = 2|\sin\tfrac{1}{2}h|\cdot|\sin(x+\tfrac{1}{2}h)| \leqslant |h|,$$

skąd

$$\lim_{h=0}\big(\cos(x+h)-\cos x\big) = 0.$$

Ponieważ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, więc funkcja tangens jako iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Również funkcje

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

są ciągłe (dla każdego x, dla którego są określone).

Spośród funkcji elementarnych pozostają jeszcze do rozpatrzenia funkcje odwrotne do już rozpatrywanych, mianowicie, logarytm i funkcje cyklometryczne. Nie będziemy teraz dowodzić ich ciągłości, ponieważ wynika ona z ogólnego twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnych względem funkcji ciągłych, które udowodnimy nieco później.

Udowodnimy natomiast obecnie, że *superpozycja funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą*. Ściślej mówiąc: *jeśli dane są dwie funkcje $y = f(x)$ i $z = g(y)$ i jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie a, funkcja g zaś jest ciągła w punkcie $f(a)$, to funkcja $g(f(x))$ jest ciągła w punkcie a.*

Niech $\lim_{n=\infty} x_n = a$, wtedy $\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(a)$. Przyjmując $b = f(a)$ i $y_n = f(x_n)$ mamy więc $\lim_{n=\infty} y_n = b$, skąd na mocy ciągłości funkcji g:

$$\lim_{n=\infty} g(y_n) = g(b), \quad \text{tj.} \quad \lim_{n=\infty} g\big(f(x_n)\big) = g\big(f(a)\big).$$

Oznacza to, że funkcja złożona (superponowana) $g\big(f(x)\big)$ jest ciągła w punkcie a.

Wynika stąd, że biorąc za punkt wyjścia funkcje elementarne rozważane w § 4.4 i operując na nich za pomocą działań arytmetycznych i superpozycji, pozostajemy stale w obrębie funkcji ciągłych.

Na przykład funkcja $x+\operatorname{tg}(x^2)$ jest funkcją ciągłą. Podobnie funkcja $\sin(1/x)$ jest funkcją ciągłą w zakresie swoich argumentów, tj. dla $x \neq 0$. Natomiast funkcja f określona przez warunki:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0 \quad \text{oraz} \quad f(0) = 0 \tag{5}$$

jest nieciągła w punkcie 0. W punkcie tym, jak wiemy, nie istnieje w ogóle granica funkcji f (por. (8), § 4.5).

Wynika też stąd, że funkcja określona przez warunki (5) nie da się zapisać przy użyciu samych funkcji ciągłych. Podobnie, funkcja zdefiniowana, jak następuje:

$$f(x) = 1 \text{ dla } x \neq 0 \quad \text{oraz} \quad f(0) = 0.$$

Funkcja ta daje się jednak zapisać za pomocą przejścia do granicy. Mianowicie:

$$f(x) = \lim_{t=\infty} \frac{xt}{1+xt} = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{1+nx}.$$

Uwaga. Następujące, nieco ogólniejsze sformułowanie twierdzenia o superpozycji funkcji dogodne jest w zastosowaniach: *jeśli istnieje* $\lim\limits_{x=a\pm 0} f(x)$ *i jeśli w tym punkcie funkcja* g *jest ciągła, to*

(6) $$\lim_{x=a\pm 0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x=a\pm 0} f(x)\right).$$

Dowód pozostaje prawie bez zmian.

Przykład. $\lim\limits_{x=+0} x^x = 1$.

Mamy bowiem

$$\lim_{x=+0} x^x = \lim_{x=+0} e^{x\log x} =$$

$$= \lim_{x=+0} \exp(x\log x) = \exp(\lim_{x=+0} x\log x) = \exp(0) = e^0 = 1,$$

gdzie dla uproszczenia symboli piszemy

$$e^x = \exp(x).$$

Tutaj

$$f(x) = x\log x, \quad g(x) = e^x.$$

Funkcja f nie jest określona w punkcie 0; posiada jednak w tym punkcie granicę prawostronną (równą 0, por. przykład 4, § 4.6).

5.4. Ogólne własności funkcji ciągłych.

Twierdzenie 1 (O ciągłości jednostajnej). *Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność $|x-x'| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$.*

Nim przystąpimy do dowodu, zauważmy, że liczba δ, o której mowa w tezie twierdzenia, nie zależy od x, jak to ma miejsce w definicji funkcji ciągłej dla każdego x (należącego do rozważanego zbioru argumentów). Tej niezależności liczby δ od zmiennej x dajemy wyraz mówiąc o *jednostajnej ciągłości*.

Dowód twierdzenia przeprowadzimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje para argumentów x i x' takich, że

$$|x-x'| < \delta \quad \text{i} \quad |f(x)-f(x')| \geqslant \varepsilon.$$

W szczególności więc, przyjmując $\delta = 1/n$, wnosimy, że istnieją takie dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{x_n'\}$, że spełnione są następujące nierówności:

$$(7) \quad a \leqslant x_n \leqslant b, \quad a \leqslant x_n' \leqslant b, \quad |x_n - x_n'| < 1/n \quad \text{oraz} \quad |f(x_n)-f(x_n')| \geqslant \varepsilon.$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, przeto zawiera on na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (tw. 2, § 2.6) podciąg zbieżny. Przyjmijmy więc $\lim\limits_{n=\infty} x_{m_n} = c$. Z pierwszej nierówności (7) wynika, że $a \leqslant c \leqslant b$. A zatem funkcja f jest ciągła w punkcie c. Wynika stąd, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_{m_n}) = f(c)$. Lecz na mocy trzeciej z nierówności (7) również

$$\lim_{n=\infty} x'_{m_n} = c, \quad \text{bo} \quad \lim_{n=\infty} x'_{m_n} = \lim_{n=\infty} x_{m_n}.$$

Ciągłość funkcji f daje jak poprzednio, $\lim f(x'_{m_n}) = f(c)$. A zatem

$$\lim_{n=\infty} \big(f(x_{m_n}) - f(x'_{m_n})\big) = 0.$$

Lecz ta ostatnia równość jest sprzeczna z ostatnią z nierówności (7).

Twierdzenie jest w ten sposób udowodnione.

Uwaga 1. Założenie, że przedział rozpatrywany jest domknięty, jest istotne. Na przykład funkcja $1/x$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego $0 < x < 1$, lecz nie jest w tym przedziale ciągła jednostajnie.

TWIERDZENIE 2 (WEIERSTRASSA). *Funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$ jest ograniczona, osiąga przy tym w tym przedziale swe kresy górny i dolny M i m; tzn. istnieją w tym przedziale takie dwa punkty c i d, że $f(c) = M$ oraz $f(d) = m$.*

Udowodnimy przede wszystkim, że funkcja f jest ograniczona, tj. że istnieje takie A, że nierówność $A > |f(x)|$ zachodzi dla każdego x z przedziału ab. Otóż z twierdzenia 1 wnosimy podstawiając $\varepsilon = 1$, że istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli punkty x i x' należą do jakiegoś przedziału (zawartego w przedziale ab) o długości mniejszej od δ, to $|f(x)-f(x')| < 1$. Dobierzmy liczbę n w taki sposób, aby $(b-a)/n < \delta$; jeśli więc podzielimy przedział ab na n równych przedziałów, to długość każdego z nich będzie mniejsza niż δ. A zatem oznaczając przez $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kolejne końce tych przedziałów $(a_0 = a,\ a_n = b)$, mamy

$$|f(x)-f(a_1)| < 1 \quad \text{dla} \quad a_0 \leqslant x \leqslant a_1, \quad \text{skąd} \quad |f(x)| < 1 + |f(a_1)|,$$

ogólnie:

$$|f(x)-f(a_k)| < 1 \quad \text{dla} \quad a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k, \quad \text{skąd} \quad |f(x)| < 1 + |f(a_k)|.$$

Oznaczmy przez A największą z liczb $1+|f(a_k)|$, gdzie k przyjmuje wartości $1, 2, \ldots, n$. Mamy więc $|f(x)| < A$ dla każdego x należącego do przedziału ab.

Udowodniliśmy w ten sposób, że funkcja f jest ograniczona, tzn. że zbiór wartości tej funkcji jest ograniczony. Istnieje więc kres górny M i kres dolny m tego zbioru (por. § 1.7). Udowodnimy — przez sprowadzenie do niedorzeczności — że jedną z wartości funkcji f jest M (dowód dla m jest zupełnie analogiczny).

Przypuśćmy, że tak nie jest, tj. że dla każdego x mamy $M-f(x) \neq 0$. A zatem funkcja

$$g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$$

jest określona dla każdego x z przedziału $a \leqslant x \leqslant b$ i jest w tym przedziale ciągła. Jest to więc, jak przed chwilą udowodniliśmy, funkcja ograniczona. Istnieje więc takie N, że $g(x) < N$, tj. $M-f(x) > 1/N$, czyli $f(x) < M-1/N$. Lecz ta ostatnia nierówność dowodzi, że istnieje liczba mniejsza od M, która jest większa od wszystkich liczb $f(x)$, gdy x przebiega przedział $a \leqslant x \leqslant b$. Przeczy to jednak założeniu, że M jest kresem górnym funkcji f w tym przedziale.

Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności, przypuszczając, że twierdzenie jest fałszywe.

Twierdzenie 3 (Własność Darboux [1]). *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$ przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie. Znaczy to, że jeśli y jest liczbą pośrednią pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ (tj. bądź $f(a) < y < f(b)$, bądź $f(b) < y < f(a)$), to istnieje takie c w przedziale ab, że $f(c) = y$.*

Załóżmy, że $f(a) < y < f(b)$ (w wypadku, gdy druga ewentualność zachodzi, rozumowanie jest zupełnie podobne). Przypuśćmy, że twierdzenie jest fałszywe, a więc że $y-f(x) \neq 0$ dla każdego x, należącego do przedziału ab. Funkcja $h(x) = 1/|y-f(x)|$ jest więc na mocy twierdzenia 2 ograniczona.

Niech $M > h(x)$, tj.

$$|y-f(x)| > \frac{1}{M}. \tag{8}$$

Podstawiając w twierdzeniu 1 $\varepsilon = 1/M$, wnosimy, że istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli punkty x i x' należą do przedziału o długości mniejszej od δ, to

$$|f(x)-f(x')| < \frac{1}{M}.$$

[1] G. Darboux (1842-1917) — słynny geometra francuski. Twierdzenie 3 pochodzi od czeskiego matematyka Bolzano (por. notkę na str. 27).

Niech n oznacza liczbę naturalną taką, że $\dfrac{b-a}{n} < \delta$. Dzieląc odcinek ab na n równych odcinków i oznaczając jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia przez $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kolejne końce tych odcinków, dochodzimy do wniosku, że

$$|f(a_k)-f(a_{k-1})| < \frac{1}{M} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Ponieważ $f(a_0) < y < f(a_n)$, więc wśród liczb $1, 2, \ldots, n$ istnieje taka najmniejsza liczba m, że $y < f(a_m)$. Mamy więc $m > 0$ oraz

$$f(a_{m-1}) < y < f(a_m), \qquad \text{skąd} \qquad 0 < y-f(a_{m-1}) < f(a_m)-f(a_{m-1}) < \frac{1}{M}$$

wobec (9), co jednak przeczy nierówności (8).

Zestawiając twierdzenia 2 i 3, dochodzimy do następującego wniosku:

TWIERDZENIE 4. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$ przyjmuje wszystkie wartości od kresu dolnego m do kresu górnego M włącznie. Inaczej mówiąc, zbiorem* wartości *funkcji jest przedział domknięty $m \leqslant y \leqslant M$.*

Uwaga 2. Własność funkcji ciągłych wyrażona w twierdzeniu 3 (tzw. własność Darboux) jest szczególnie intuicyjna, jeśli ją interpretować geometrycznie. Nie należy jednak sądzić, że charakteryzuje ona funkcje ciągłe; np. funkcja (5), choć nieciągła, posiada tę własność.

Uwaga 3. Z własności Darboux funkcji x^n wynika istnienie $\sqrt[n]{x}$ dla każdego x rzeczywistego, gdy n jest nieparzyste, i dla każdego $x \geqslant 0$, gdy n jest parzyste. Istotnie, gdy n jest nieparzyste, to $\lim\limits_{x=-\infty} x^n = -\infty$, $\lim\limits_{x=\infty} x^n = \infty$, a zatem funkcja x^n przybiera wszystkie wartości rzeczywiste. Funkcja względem niej odwrotna, tj. $\sqrt[n]{x}$, jest więc określona dla każdego x rzeczywistego. Podobnie, jeśli n jest parzyste, to funkcja x^n, $x \geqslant 0$, przybiera wszystkie wartości od 0 do ∞; a zatem pierwiastek $\sqrt[n]{x}$ jest dla tych wszystkich wartości określony.

Analogicznie ze wzorów $\lim\limits_{x=-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x=\infty} e^x = \infty$ wynika, że funkcja e^x przybiera wszystkie wartości dodatnie; a zatem $\log x$ określony jest dla każdego dodatniego x. Wreszcie $\operatorname{arctg} x$ określony jest dla każdego rzeczywistego x.

Dodajmy, że wzory (3), § 4.4, z łatwością pociągają za sobą wzory następujące, dotyczące logarytmów dla dodatnich a, x i y ($a \neq 1$):

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a (x^y) = y \log_a x, \tag{10}$$

$$a^x = e^{x \log a}, \qquad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}. \tag{11}$$

Na przykład aby dowieść pierwszy ze wzorów (10), przyjmijmy $\log_a x = t$, $\log_a y = z$, tj. $x = a^t$, $y = a^z$. Na mocy (3), § 4.4,

$$xy = a^t a^z = a^{t+z}, \quad \text{skąd} \quad \log_a xy = t + z = \log_a x + \log_a y.$$

Drugi ze wzorów (11) otrzymuje się z drugiego ze wzorów (10):

$$\log a^t = t \log a, \quad \text{tj.} \quad \log x = \log_a x \log a.$$

5.5. Ciągłość funkcji odwrotnych. Widzieliśmy w § 4.3, że funkcja $y = f(x)$ różnowartościowa wyznacza funkcję odwrotną $x = g(y)$. Udowodnimy obecnie, że *funkcja odwrotna względem funkcji ciągłej jest ciągła*. Ściślej mówiąc, udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest różnowartościowa i ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, to funkcja odwrotna $x = g(y)$ jest ciągła w przedziale $m \leqslant y \leqslant M$, gdzie m i M oznaczają odpowiednio kres dolny i górny funkcji f.*

Niech $m \leqslant c \leqslant M$. Na mocy twierdzenia 4, § 5.4, funkcja g jest określona w punkcie c. Niech $c = \lim\limits_{n=\infty} y_n$, gdzie y_n należy do przedziału mM, tj. y_n jest postaci $y_n = f(x_n)$. Należy dowieść, że $\lim\limits_{n=\infty} g(y_n) = g(c)$.

Niech $c = f(d)$. Mamy więc dowieść, że warunek $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = f(d)$ pociąga za sobą $\lim\limits_{n=\infty} x_n = d$ (bowiem $g(y_n) = x_n$, $g(c) = d$). Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jako położony w przedziale ab jest ograniczony, to ostatnia równość będzie udowodniona, skoro wykażemy, że każdy zbieżny podciąg ciągu $\{x_n\}$ jest zbieżny do granicy d (por. tw. 4, § 2.6). Niech więc $\lim\limits_{n=\infty} x_{k_n} = d'$. Wykażemy, że $d' = d$. Z ciągłości funkcji f wynika, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_{k_n}) = f(d')$. Ponieważ zaś

$$\lim_{n=\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n=\infty} f(x_n) = f(d),$$

więc $f(d') = f(d)$. Stąd wnosimy, że $d' = d$ ze względu na to, że funkcja f jest różnowartościowa.

Twierdzenie jest więc udowodnione.

ZASTOSOWANIA. PRZYKŁAD 1. $\log_a x$ *jest funkcją ciągłą* $(1 \neq a > 0)$. Jest to bowiem odwrócenie funkcji ciągłej a^x.

PRZYKŁAD 2. *Funkcje cyklometryczne*: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ itd. *są ciągłe* jako odwrócenia funkcji trygonometrycznych (które są ciągłe).

PRZYKŁAD 3. *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Jeśli iloczyn nieskończony $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg nieskończony $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log a_n$, przy czym zachodzi zależność*

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n, \quad \text{tj.} \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n\Big). \tag{12}$$

Podobnie, *jeśli założyć zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n$, *to zbieżny jest iloczyn* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *i również ma miejsce zależność* (12).

Niech bowiem $p_n = a_1 a_2 \dots a_n$. Z założenia, że ciąg $\{p_n\}$ jest zbieżny i z ciągłości logarytmu wynika (por. (2)):

$$\log \lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} \log p_n,$$

lecz

$$\lim_{n=\infty} \log p_n = \lim_{n=\infty} \log(a_1 \dots a_n) = \lim_{n=\infty} (\log a_1 + \dots + \log a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n.$$

Podobnie, przyjmując

$$s_n = \log a_1 + \dots + \log a_n$$

i zakładając zbieżność ciągu $\{s_n\}$, mamy na mocy ciągłości funkcji wykładniczej

$$e^{\lim s_n} = \lim e^{s_n},$$

lecz

$$e^{s_n} = e^{\log a_1 + \dots + \log a_n} = e^{\log a_1} \dots e^{\log a_n} = p_n,$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} e^{s_n} = \lim_{n=\infty} p_n.$$

Wzór (12), który, jak widać, jest uogólnieniem na działania nieskończone pierwszego ze wzorów (10), pozwala przenieść na iloczyny nieskończone wiele twierdzeń, dotyczących szeregów nieskończonych.

Twierdzenie 2. *Każda funkcja f różnowartościowa i ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ jest ściśle monotoniczna (tj. bądź stale rosnąca, bądź stale malejąca).*

Z założenia $f(a) \neq f(b)$. Możemy więc założyć, że $f(a) < f(b)$ (jeżeli $f(a) > f(b)$ rozumowanie jest analogiczne). Udowodnimy, że funkcja f jest stale rosnąca. Niech więc $x < x'$. Należy dowieść, że $f(x) < f(x')$.

Zauważmy przede wszystkim, że warunki $a \leqslant x \leqslant b$ i $f(a) < f(b)$ pociągają za sobą $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Istotnie, gdyby tak nie było, to mielibyśmy bądź $f(x) < f(a)$, bądź $f(x) > f(b)$. W pierwszym wypadku, ze względu na podwójną nierówność $f(x) < f(a) < f(b)$ istniałby (na mocy własności Darboux) w przedziale xb taki punkt x'', że $f(x'') = f(a)$. Lecz to przeczy założeniu, że funkcja f jest różnowartościowa (bo $x'' \neq a$). Podobnie, w drugim wypadku istniałby punkt x''' w przedziale ax taki, że $f(x''') = f(b)$, co jest sprzeczne z nierównością $x''' \neq b$.

Udowodniliśmy więc, że $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Wnosimy zarazem, że warunki $x \leqslant x' \leqslant b$ i $f(x) < f(b)$ pociągają za sobą $f(x) \leqslant f(x') \leqslant f(b)$ A zatem $f(x) < f(x')$, c.b.d.o.

Zadania

1. Niech f oznacza funkcję określoną jak następuje: jeśli x jest liczbą niewymierną, to $f(x) = 0$; jeśli zaś x jest liczbą wymierną: $x = p/q$ (przy czym ułamek ten jest nieprzywiedlny), to $f(x) = 1/q$. Udowodnić, że funkcja ta jest ciągła w punktach niewymiernych, a nieciągła w punktach wymiernych.

2. Udowodnić, że każda funkcja f określona w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, różnowartościowa i posiadająca własność Darboux (uwaga 2, § 5.4) jest ciągła.

3. Udowodnić, że każde równanie stopnia n nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, tj. równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Wskazówka. Por. zad. 2, § 4.

4. Udowodnić, że funkcja f ciągła i spełniająca warunek

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla każdego x i y jest postaci $f(x) = ax$.

Wskazówka. Udowodnić najpierw tę równość dla x wymiernych przyjmując $a = f(1)$.

5. Czy funkcja $\sin(1/x)$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $0 < x < 1$, a funkcja $\sqrt{x}$ w przedziale $0 < x < \infty$?

6. Niech f i g będą dwiema funkcjami ciągłymi w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Niech $h(x)$ oznacza większą z dwóch wartości $f(x)$ i $g(x)$ (ewentualnie ich wspólną wartość, jeśli są one równe). Udowodnić, że funkcja h jest ciągła.

7. Do danego ciągu $a_1, a_2, \ldots$ dobrać funkcję, która jest nieciągła w punktach tego ciągu, a ciągła we wszystkich pozostałych punktach.

8. O funkcji f mówimy, że spełnia *warunek Lipschitza*, jeśli istnieje taka stała C, że zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(x')| \leqslant C|x - x'|$$

dla każdej pary x i x'.

Scharakteryzować warunek Lipschitza w sposób geometryczny.

Udowodnić, że funkcja spełniająca warunek Lipschitza (w przedziale domkniętym lub otwartym, ograniczonym lub nieograniczonym) jest jednostajnie ciągła.

Wykazać na przykładzie, że nie zachodzi twierdzenie odwrotne.

§ 6. Ciągi i szeregi funkcji

6.1. Zbieżność jednostajna. Jeżeli każdej liczbie naturalnej n przyporządkowana jest funkcja f_n, to mamy do czynienia z ciągiem funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ Załóżmy, że wszystkie te funkcje określone są na tym samym zbiorze argumentów A (np. na przedziale $a \leqslant x \leqslant b$). Jeżeli dla każdego x (należącego do A) ciąg $f_1(x), f_2(x), \ldots$ jest zbieżny do granicy $f(x)$, to mówimy, że ciąg funkcji $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f. W myśl definicji granicy (§ 2.2) oznacza to, że do każdego x i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność

$$(1) \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Liczbę k dobieramy więc (przy danym ε) do każdego x z osobna. Jeśli jednak można ustalić k niezależnie od x-ów, to mówimy, że zbieżność naszego ciągu jest *jednostajna*. A więc: *ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f (na zbiorze A), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla każdego $n > k$ i każdego x (należącego do A) zachodzi nierówność* (1).

Geometrycznie zbieżność jednostajna oznacza, że jeśli krzywą graniczną $y = f(x)$ otoczymy pasem wyznaczonym przez dwie krzywe równoległe do niej (dane przez równania $y = f(x) \pm \varepsilon$), to dla dostatecznie dużych n wszystkie krzywe $y = f_n(x)$ mieszczą się w tym pasie.

PRZYKŁADY. Niech $f_n(x) = x^n$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{dla} \quad x = 1.$$

Ciąg ten jest zbieżny jednostajnie w przedziale $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Dobierzmy bowiem do danej liczby $\varepsilon > 0$ liczbę k w taki sposób, aby $1/2^k < \varepsilon$. Wówczas dla $n > k$ mamy

$$x^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2^k} < \varepsilon, \quad \text{o ile} \quad x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Nierówność (1) jest więc spełniona przez każde $n > k$ i każde x należące do przedziału $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Znaczy to, że zbieżność ciągu $\{f_n\}$ w tym przedziale jest jednostajna. Natomiast w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ zbieżność jest niejednostajna. Łatwo się o tym przekonać bezpośrednio (podstawiając np. $\varepsilon = \frac{1}{2}$); wynika to też z nieciągłości funkcji granicznej i następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 1. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.*

Niech ciąg $\{f_n\}$ będzie jednostajnie zbieżny do f (na zbiorze A). Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie k, że dla $n \geqslant k$ spełniona jest nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{2}$$

dla każdego x (należącego do A). Niech a będzie dowolnym punktem należącym do A. Należy dowieść, że funkcja f jest ciągła w tym punkcie. Należy więc dobrać do danego ε takie $\delta > 0$, aby nierówność $|x - a| < \delta$ pociągała za sobą (w zakresie x-ów należących do A)

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Otóż ze względu na ciągłość funkcji f_k w punkcie a, istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność $|x - a| < \delta$ pociąga za sobą

$$|f_k(x) - f_k(a)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{4}$$

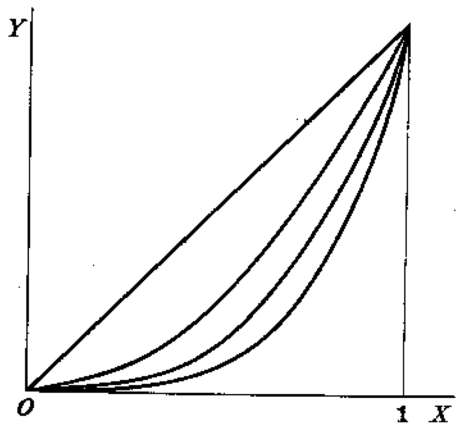
Ponieważ nierówność (2) spełniona jest dla $n = k$ i $x = a$, przeto

$$|f_k(a) - f(a)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{5}$$

Zastępując w nierówności (2) n przez k i dodając do niej (4) i (5), otrzymujemy nierówność (3), c.b.d.o.

Uwaga. Jak widzieliśmy, funkcja $f(x) = \lim_{n=\infty} x^n$ (por. rys. 9) jest w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ nieciągła. Granica niejednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych może więc być nieciągła. Twierdzenie 1 w zestawieniu z powyższym przykładem ilustruje znaczenie pojęcia jednostajnej zbieżności.

Podobnie jak w wypadku jednostajnej ciągłości funkcji, termin „jednostajność" wskazuje na to, że liczba k dobrana jest do ε niezależnie od x.



Rys. 9

Odpowiednikiem warunku Cauchy'ego na zbieżność ciągu jest warunek sformułowany w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 2. *Na to, żeby ciąg funkcji $\{f_n\}$ był zbieżny jednostajnie, potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba r, że dla każdego $n > r$ zachodzi nierówność*

(6) $$|f_n(x) - f_r(x)| < \varepsilon.$$

Załóżmy najpierw, że ciąg jest zbieżny jednostajnie do funkcji f. Dla danej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie r, że dla $n \geqslant r$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{a więc} \quad |f_r(x) - f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Dodając do siebie te dwie nierówności, otrzymujemy nierówność (6).

Załóżmy z kolei, że ciąg $\{f_n\}$ spełnia warunek sformułowany w twierdzeniu. Wówczas przy ustalonym x ciąg $f_1(x), f_2(x), \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego; jest zatem zbieżny. Inaczej mówiąc, istnieje funkcja $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$. Należy dowieść, że zbieżność jest jednostajna. Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$. Na mocy założenia istnieje takie r, że dla $n > r$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f_r(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{7}$$

Udowodnimy, że dla $n > r$ spełniona jest również nierówność (1) (ze znakiem $\leqslant$ zamiast $<$).

Zastępując we wzorze (7) zmienną n przez m i dodając do nierówności (7) w ten sposób otrzymaną nierówność $|f_m(x) - f_r(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, otrzymujemy dla $m > r$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{skąd} \quad \lim_{m=\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon,$$

zatem

$$\left|\lim_{m=\infty} \big(f_n(x) - f_m(x)\big)\right| \leqslant \varepsilon, \quad \text{czyli} \quad |f_n(x) - \lim_{m=\infty} f_m(x)| \leqslant \varepsilon,$$

co znaczy, że

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

6.2. Szeregi zbieżne jednostajnie. Niech dany będzie ciąg funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ określonych na tym samym zbiorze argumentów.

Szereg funkcyjny $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ nazywamy *zbieżnym jednostajnie*, jeśli ciąg sum częściowych

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli funkcje $f_1, f_2, \ldots$ są ciągłe, to oczywiście ciągłe też są sumy częściowe s_n. Wnosimy stąd na mocy twierdzeń z § 6.1, że zachodzi

TWIERDZENIE 1. *Suma szeregu jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

TWIERDZENIE 2. *Na to, żeby szereg $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ był zbieżny jednostajnie, potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba k, że dla każdego $n > k$ i dla każdego x zachodzi nierówność*

$$|f_k(x) + f_{k+1}(x) + \ldots + f_n(x)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Z twierdzenia 2 wynika twierdzenie, które pozwala wyprowadzić zbieżność jednostajną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ przez porównanie jego składników ze składnikami szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny i jeżeli dla każdego x spełniona jest nierówność $|f_n(x)| \leqslant u_n$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.*

Istotnie, ponieważ szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest zbieżny, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla każdego $n > k$ spełniona jest nierówność $u_k+u_{k+1}+\ldots+u_n < \varepsilon$. Stąd na mocy założenia

$$|f_k(x)+\ldots+f_n(x)| \leqslant |f_k(x)|+\ldots+|f_n(x)| \leqslant u_k+\ldots+u_n < \varepsilon;$$

a zatem wzór (8) jest spełniony, co zgodnie z twierdzeniem 2 pociąga za sobą zbieżność jednostajną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Druga część powyższej podwójnej nierówności dowodzi równocześnie, że szereg jest zbieżny bezwzględnie.

PRZYKŁAD. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale $-a \leqslant x \leqslant a$. Bo $\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \dfrac{a_n}{n!}$, a szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego a (por. § 3.7).

Wiele przykładów szeregów jednostajnie zbieżnych poznamy w § 6.3.

6.3. Szeregi potęgowe. Szereg postaci

$$S(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \text{ (1)} \tag{9}$$

nazywamy *szeregiem potęgowym*.

Jak widać, szereg potęgowy jest naturalnym uogólnieniem pojęcia wielomianu n-tego stopnia. Znaczenie szeregów potęgowych pochodzi również stąd, że przedstawienie danej funkcji w postaci szeregu potęgowego daje duże korzyści rachunkowe.

Weźmy pod uwagę następujące trzy przykłady szeregów potęgowych

(a) $$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$

(b) $$1+x+x^2+x^3+\ldots,$$

(c) $$1+1!x+2!x^2+3!x^3+\ldots$$

Pierwszy z tych szeregów jest, jak wiemy, zbieżny dla każdego x. Drugi jest zbieżny dla $|x| < 1$, suma jego jest równa $1/(1-x)$; dla innych x szereg ten jest rozbieżny. Wreszcie trzeci szereg jest rozbieżny dla każdego $x \neq 0$.

(1) Ściśle biorąc, należy dla $x=0$ symbol $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ (który w tym wypadku jest nieoznaczony) zastąpić przez a_0 (por. odsyłacz do wzoru (6), § 1.3).

W celu sformułowania ogólnego twierdzenia o zbieżności szeregów potęgowych, wprowadzimy pojęcie „promienia zbieżności" szeregu potęgowego. Mianowicie, *promieniem zbieżności* szeregu potęgowego $S(x)$ nazywamy kres górny zbioru bezwzględnych wartości x-ów, dla których szereg ten jest zbieżny. W szczególności, jeżeli zbiór ten jest nieograniczony, to promieniem zbieżności jest ∞.

Na przykład promieniami zbieżności szeregów (a), (b) i (c) są odpowiednio ∞, 1 i 0.

Przedział $-r < x < r$, gdzie r oznacza promień zbieżności danego szeregu potęgowego, nazywamy jego *przedziałem zbieżności*. W wypadku gdy $r = \infty$, przedział zbieżności pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Terminologia ta pozostaje w związku z następującym twierdzeniem:

TWIERDZENIE 1. *W każdym przedziale domkniętym położonym wewnątrz przedziału zbieżności szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.*

Wystarczy udowodnić nasze twierdzenie dla przedziałów postaci $-c \leqslant x \leqslant c$, gdzie $c < r$ (bo każdy przedział domknięty położony wewnątrz przedziału zbieżności zawarty jest w takim przedziale o środku 0). Ponieważ r jako promień zbieżności jest kresem górnym zbioru bezwzględnych wartości punktów zbieżności szeregu $S(x)$, więc istnieje punkt $b > c$ taki, że szereg $S(b)$ lub $S(-b)$ jest zbieżny. Ze zbieżności szeregu $S(\pm b)$ wynika, że składniki jego tworzą ciąg ograniczony. Niech więc $M > |a_n b^n|$ dla każdego n. Wnosimy stąd, że dla $|x| \leqslant c$ mamy

$$|a_n x^n| = |a_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n \leqslant M\left(\frac{c}{b}\right)^n.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c/b)^n$ jako szereg geometryczny o ilorazie mniejszym od 1 jest zbieżny, więc na mocy twierdzenia 3, § 6.2, szereg $S(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $-c \leqslant x \leqslant c$.

Uwaga. Z twierdzenia powyższego wnosimy, że wewnątrz przedziału zbieżności szereg jest zbieżny, a zewnątrz rozbieżny (to ostatnie wynika z definicji promienia zbieżności). Natomiast na krańcach przedziału zbieżności szereg może być zbieżny lub rozbieżny. Świadczą o tym przykłady następujące: szereg (b) jest rozbieżny na krańcach przedziału zbieżności, mianowicie, $S(1) = \infty$, szereg $S(-1) = 1-1+1-1+\ldots$ nie posiada ani skończonej, ani nieskończonej granicy; szereg

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

(przedstawiający $\log(1+x)$) jest zbieżny dla $x = 1$, a jest rozbieżny do $-\infty$ dla $x = -1$.

Twierdzenie poprzednie w zestawieniu z twierdzeniem 1 z § 6.2 pociąga za sobą

TWIERDZENIE 2. *Szereg potęgowy $S(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale otwartym $-r < x < r$, tj. wewnątrz przedziału zbieżności.*

Istotnie, do każdego x leżącego między $-r$ a r można dobrać przedział domknięty o środku x położony wewnątrz przedziału zbieżności. Ponieważ zaś w tym przedziale domkniętym szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie, więc na mocy twierdzenia 1 z § 6.2 przedstawia on funkcję ciągłą.

Opierając się na twierdzeniu Abela z teorii szeregów nieskończonych (tw. 2, § 3.3), uzupełnimy to twierdzenie odnośnie ciągłości szeregu potęgowego na krańcach przedziału zbieżności.

TWIERDZENIE 3 (ABELA). *Szereg potęgowy zbieżny w jednym z krańców przedziału zbieżności stanowi w tym punkcie funkcję ciągłą (jednostronnie).*

Ściślej mówiąc, jeśli szereg $S(r)$ (względnie $S(-r)$) jest zbieżny, to szereg $S(x)$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $0 \leqslant x \leqslant r$ (względnie w przedziale $-r \leqslant x \leqslant 0$).

Załóżmy, że szereg $S(r)$ jest zbieżny. Oznaczmy n-tą resztę tego szeregu przez R_n:

$$R_n = a_{n+1}r^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2} + \ldots$$

Mamy więc $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Istnieje zatem takie k, że dla $i > n > k$ mamy

$$|a_{n+1}r^{n+1} + \ldots + a_i r^i| < \varepsilon.$$

Oznaczmy ogólnie n-tą resztę szeregu $S(x)$ przez $R_n(x)$:

$$R_n(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots$$

W szczególności więc $R_n(r) = R_n$. Zauważmy, że

$$R_n(x) = a_{n+1}r^{n+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} + a_{n+2}r^{n+2}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+2} + \ldots$$

i zastosujmy twierdzenie Abela (tw. 2 i uwaga 1, § 3.3), zastępując w nim ciąg $\{a_n\}$ przez ciąg $\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}, \left(\frac{x}{r}\right)^{n+2}, \ldots$ oraz szereg $b_1 + b_2 + \ldots$ przez szereg R_n.

Ponieważ szereg ten jest ograniczony przez liczbę ε i ponieważ

$$1 > \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} > \left(\frac{x}{r}\right)^{n+2} > \ldots \quad \text{i} \quad \lim_{m=\infty}\left(\frac{x}{r}\right)^m = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x < r,$$

wnosimy, że $|R_n(x)| < 2\varepsilon$. Nierówność ta spełniona jest też dla $x = r$. Doszliśmy więc do wniosku, że jeśli $n > k$, to nierówność

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m - \sum_{m=0}^{n} a_m x^m\right| < 2\varepsilon$$

jest spełniona przez każde x takie, że $0 \leqslant x \leqslant r$. Oznacza to, że szereg $S(x)$ jest w tym przedziale jednostajnie zbieżny.

W wypadku gdy szereg $S(-r)$ jest zbieżny rozumowanie jest analogiczne.

Twierdzenia 2 i 3 możemy jeszcze wypowiedzieć w sposób następujący: ***każdy punkt zbieżności szeregu potęgowego jest zarazem jego punktem ciągłości.***

Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego pozwalają niekiedy na łatwe obliczenie promienia zbieżności. Mianowicie:

TWIERDZENIE 4. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$, *to promień zbieżności szeregu potęgowego* $S(x)$ *jest* $r = 1/g$ *(przy tym, jeśli* $g = 0$, *to* $r = \infty$; *jeśli* $g = \infty$, *to* $r = 0$).

Analogicznie, *jeśli istnieje* $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, *to*

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Istotnie, niech $x > 0$. Otrzymujemy

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = x\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = xg. \tag{10}$$

Jeśli więc $x < 1/g$, to rozważana granica jest mniejsza od 1, a zatem szereg $S(x)$ jest zbieżny (bezwzględnie). Stąd $r \geqslant 1/g$. Gdyby przypuścić, że $r > 1/g$, to dla $1/g < x < r$ szereg $S(x)$ byłby bezwzględnie zbieżny, co jednak jest niemożliwe ze względu na to, że granica rozpatrywana we wzorze (10) byłaby większa od 1.

Rozumowanie powyższe obejmuje również wypadek, kiedy $g = 0$ lub ∞. Dowód odnoszący się do kryterium Cauchy'ego jest analogiczny.

6.4. Aproksymowanie funkcji ciągłych przez funkcje przedziałami liniowe. Funkcję f nazywamy *przedziałami liniową w przedziale ab*, jeśli przedział ten można podzielić na skończoną ilość mniejszych przedziałów w taki sposób, aby funkcja była liniowa w każdym z tych przedziałów z osobna. Znaczy to, że istnieje taki układ $n+1$ punktów

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_0 = a, \quad a_n = b, \tag{11}$$

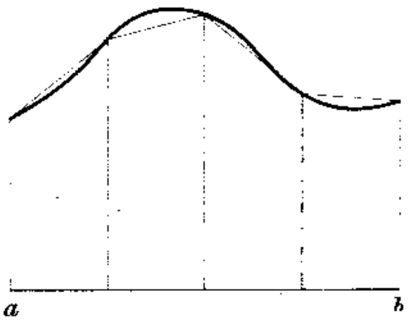
oraz takie dwa układy liczb rzeczywistych $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i $d_1, d_2, \ldots, d_n$, że

$$f(x) = c_k x + d_k \quad \text{dla} \quad a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Na przykład funkcja $f(x) = |x|$ jest w przedziale $-1 \leqslant x \leqslant 1$ przedziałami liniowa; bowiem $f(x) = -x$ w przedziale $-1, 0$ oraz $f(x) = x$ w przedziale $0, 1$.

Wykresem funkcji przedziałami liniowej jest linia łamana. Odwrotnie, jeśli linia łamana stanowi wykres funkcji, to funkcja ta jest przedziałami liniowa.

Niejednokrotnie mamy do czynienia z aproksymowaniem krzywych przez łamane (np. w geometrii elementarnej aproksymujemy łuk koła przez łamane wpisane i opisane przy obliczaniu długości tego łuku) (rys. 10).



Rys. 10

Następujące twierdzenie daje wyraz analityczny aproksymacji krzywych, danych przez funkcje ciągłe, za pomocą łamanych (danych przez funkcje przedziałami liniowe).

TWIERDZENIE 1. *Każda funkcja ciągła f w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych.*

Przy każdym n rozważamy podział odcinka ab na n równych odcinków: $aa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-1}b$ (mamy więc ogólnie $a_k = a+k\dfrac{b-a}{n}$). Przez punkty $(a, f(a)), (a_1, f(a_1)), \ldots, (a_n f(a_n))$ przeciągamy łamaną. Łamana ta jest wykresem pewnej funkcji przedziałami liniowej f_n. Udowodnimy, że ciąg funkcji f_n jest zbieżny jednostajnie do funkcji f.

Do danego $\varepsilon > 0$ możemy dobrać — ze względu na jednostajną ciągłość funkcji f w przedziale ab — takie $\delta > 0$, że nierówność $|x-x'| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$. Niech $m > (b-a)/\delta$. Udowodnimy, że dla $n > m$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x)-f(x)| < 2\varepsilon \tag{13}$$

dla każdego x z przedziału ab.

Istotnie, niech dane będzie x i $n > m$ i niech punkt x należy do przedziału $a_{k-1}a_k$ (n-tego przedziału). Ponieważ długość tego przedziału jest mniejsza od δ, przeto

$$|f(a_{k-1})-f(a_k)| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |f(x)-f(a_k)| < \varepsilon. \tag{14}$$

Przypuśćmy, że $f(a_{k-1}) \leqslant f(a_k)$ (jeśli $f(a_{k-1}) \geqslant f(a_k)$, rozumowanie jest analogiczne). Wówczas w przedziale $a_{k-1}a_k$ funkcja f_n jako funkcja liniowa jest niemalejąca. A zatem

$$f_n(a_{k-1}) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a_k). \tag{15}$$

Ponieważ zaś w myśl definicji funkcji f_n mamy $f_n(a_{k-1}) = f(a_{k-1})$ oraz $f_n(a_k) = f(a_k)$, przeto

$$f(a_{k-1}) \leqslant f_n(x) \leqslant f(a_k),$$

co wobec pierwszej z nierówności (14) daje $|f_n(x) - f(a_k)| < \varepsilon$. Zestawiając tę nierówność z drugą z nierówności (14), otrzymujemy wzór (13).

Podamy tu jeszcze bez dowodu twierdzenie, analogiczne do poprzedniego:

TWIERDZENIE 2 (WEIERSTRASSA). *Każda funkcja ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.*

6. 5*. Symbolika logiczna. Ponieważ symbolika logiczna pozwala w wielu wypadkach na gruntowniejsze zrozumienie twierdzeń i pojęć matematycznych, podamy tu podstawowe pojęcia i symbole logiczne używane w analizie matematycznej.

Mając dane dwa zdania α i β, oznaczamy przez $\alpha \vee \beta$ zdanie „α lub β" (sumę, czyli alternatywę zdań α i β); przez $\alpha \wedge \beta$ oznaczać będziemy zdanie „α i β" (iloczyn, czyli koniunkcję zdań α i β).

Każde zdanie ma jedną z dwóch wartości: prawdę (oznaczaną symbolem 1) lub fałsz (oznaczany przez 0). Suma logiczna $\alpha \vee \beta$ jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jej składników jest zdaniem prawdziwym. Natomiast iloczyn logiczny $\alpha \wedge \beta$ jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa czynniki są prawdziwe.

Analogicznie do działań arytmetycznych dodawanie i mnożenie logiczne jest przemienne i łączne

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \qquad \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha,$$

$$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma, \qquad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

Zachodzą również prawa rozdzielności

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$$

Powyższe wzory sprawdzamy, podstawiając 0 (fałsz) i 1 (prawda) na α, β, γ i badając, czy po obu stronach równości otrzymujemy za każdym razem tę samą wartość logiczną.

Oprócz powyższych dwóch operacji rozważamy również negację zdania α, oznaczając ją przez $\sim\alpha$. Oczywiście zdanie $\sim\alpha$ jest prawdziwe, jeśli zdanie α jest fałszywe, a jest fałszywe, jeśli zdanie α jest prawdziwe.

Ponadto, widać natychmiast, że

$$(16) \qquad \sim(\sim\alpha) = \alpha$$

(dwie negacje redukują się wzajemnie).

Łatwe są również do udowodnienia następujące dwa twierdzenia (tzw. *prawa de Morgana*):

$$(17) \qquad \sim(\alpha \vee \beta) = (\sim\alpha) \wedge (\sim\beta) \quad \text{oraz} \quad \sim(\alpha \wedge \beta) = (\sim\alpha) \vee (\sim\beta).$$

Pierwsze z tych twierdzeń orzeka, że zdanie: „jedno z dwóch zdań α i β jest prawdziwe" jest fałszywym zdaniem wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa zdania $\sim\alpha$ i $\sim\beta$ są prawdziwe, tj. gdy α i β są fałszywe.

Drugie twierdzenie orzeka, że zdanie „nie jest prawdą, że obydwa zdania α i β są jednocześnie prawdziwe" jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy bądź α, bądź β jest fałszywe.

Oprócz operacji dodawania, mnożenia i negacji rozpatruje się w rachunku zdań również relację implikacji. Piszemy mianowicie $\alpha \Rightarrow \beta$ dla oznaczenia, że zdanie α implikuje zdanie β, tzn. że jeśli α jest prawdziwe, to β jest również prawdziwe; innymi słowy: albo α jest fałszywe, albo β jest prawdziwe. Jak widać, zdanie $\alpha \Rightarrow \beta$ jest równoważne sumie logicznej $(\sim\alpha) \vee \beta$. Stąd więc wynika na podstawie wzorów (17) i (16), że

$$(18) \qquad \sim(\alpha \Rightarrow \beta) = \alpha \wedge (\sim\beta).$$

Działania dodawania i mnożenia można rozciągnąć przez indukcję na skończoną liczbę składników, względnie czynników. W zastosowaniach odgrywa dużą rolę uogólnienie tych działań na dowolną ilość (skończoną lub nieskończoną) składników lub czynników. Dokonywamy tego w następujący sposób:

Niech $\varphi(x)$ będzie wyrażeniem zawierającym zmienną x i stającym się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), gdy na miejsce zmiennej x podstawimy jakąkolwiek jej wartość. Wyrażenie takie nazywamy *funkcją zdaniową*; np. wyrażenie $x > 2$ jest funkcją zdaniową. Staje się ono zdaniem; gdy na miejsce x podstawimy jakąkolwiek liczbę rzeczywistą; samo to wyrażenie jednak zdaniem nie jest. O wartościach zmiennej zdaniowej x, dla których $\varphi(x)$ jest zdaniem prawdziwym, mówimy, że spełniają tę funkcję.

Następujące dwa działania wykonywamy na funkcjach zdaniowych [1]:

$$(19) \qquad \bigvee_x \varphi(x) \quad \text{i} \quad \bigwedge_x \varphi(x).$$

Pierwsze wyrażenie czytamy: „jakieś x spełnia funcję φ" (czyli: istnieje takie x_0, że $\varphi(x_0)$ jest prawdą); drugie oznacza: „każde x spełnia funkcję φ" (czyli: dla każdego x zdanie $\varphi(x)$ jest prawdziwe).

---

[1] Piszemy też $\exists x \varphi(x)$ i $\forall x \varphi(x)$

Jak widać, wyrażenia (19) są zdaniami. Na przykład $\bigvee_x (x>2)$ jest zdaniem prawdziwym, $\bigwedge_x (x>2)$ jest zdaniem fałszywym. Ogólnie: dopisując przed funkcją zdaniową operator $\bigwedge_x$ lub $\bigvee_x$ (operatory te zwane są *kwantyfikatorami*) przekształcamy funkcję zdaniową w zdanie.

Pisząc zmienną x, powinniśmy zdawać sobie sprawę z zakresu jej zmienności (częstokroć sam sposób znakowania wskazuje na ten zakres); np. dla funkcji zdaniowej $x>2$, zakresem zmienności x-ów jest zbiór liczb rzeczywistych.

W przypadku gdy zakres zmienności x-ów jest skończony, kwantyfikatory $\bigvee$ i $\bigwedge$ pokrywają się z działaniami $\vee$ i $\wedge$. Istotnie, jeśli zakres zmienności zmiennej x składa się z n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to

$$\bigvee_x \varphi(x) = \big(\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \ldots \vee \varphi(a_n)\big),$$

$$\bigwedge_x \varphi(x) = \big(\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(a_n)\big).$$

Prawa de Morgana dają się uogólnić na kwantyfikatory. Zachodzą mianowicie twierdzenia

(20) $$\sim\bigvee_x \varphi(x) = \bigwedge_x \sim\varphi(x) \quad \text{oraz} \quad \sim\bigwedge_x \varphi(x) = \bigvee_x \sim\varphi(x).$$

Istotnie, jeśli nieprawdą jest, że istnieje taka wartość zmiennej x, dla której $\varphi(x)$ jest zdaniem prawdziwym, to znaczy to, że dla każdego x zdanie $\varphi(x)$ jest fałszywe, czyli: zdanie $\sim\varphi(x)$ jest prawdziwe.

Podobnie można się przekonać o prawdziwości drugiego wzoru de Morgana.

Obok funkcji zdaniowych jednej zmiennej rozważamy funkcje zdaniowe dwóch lub większej liczby zmiennych. Na przykład $y=x^2$ jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych (moglibyśmy ją oznaczyć przez $\varphi(x,y)$), staje się ona zdaniem, gdy na miejsce zmiennych x i y podstawimy jakieś ich wartości. Podobnie $z=x+y$ jest funkcją zdaniową trzech zmiennych.

Zapiszmy obecnie definicję granicy ciągu nieskończonego (por. § 2.2) za pomocą symboliki logicznej ([1]):

(21) $$(g = \lim_{n=\infty} a_n) \equiv \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_n \big((n>k) \Rightarrow (|a_n - g| < \varepsilon)\big),$$

gdzie zakresem zmienności zmiennych n i k jest zbiór liczb naturalnych, a zmiennej ε — zbiór liczb dodatnich.

Podobnie, warunek konieczny i dostateczny Cauchy'ego na zbieżność ciągu $\{a_n\}$ (por. § 2.7) wyraża się jak następuje:

(22) $$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_r \bigwedge_n \big((n>r) \Rightarrow (|a_n - a_r| < \varepsilon)\big).$$

([1]) Symbol $\equiv$ oznacza „jest równoważny".

Definicja ograniczoności funkcji f w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ ma postać następującą:

(23) $$\bigvee_M \bigwedge_x |f(x)| < M.$$

Definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji f w punkcie x_0 (por. (3), § 5.2) daje się zapisać w taki sposób:

(24) $$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_h \Big((|h| < \delta) \Rightarrow \big(|f(x_0+h)-f(x_0)| < \varepsilon\big)\Big).$$

Tu oczywiście zakresem ε i δ jest zbiór liczb dodatnich, a zakresem zmiennej h — zbiór liczb rzeczywistych.

Ponieważ funkcja ciągła na danym zbiorze (np. dla $a < x < b$) jest w myśl definicji funkcją ciągłą w każdym punkcie tego zbioru, zatem aby zapisać tę definicję za pomocą symboliki logicznej, należy wyrażenie (24) poprzedzić kwantyfikatorem $\bigwedge_x$ (zastępując x_0 przez x). Otrzymujemy w ten sposób

(25) $$\bigwedge_x \bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_h \Big((|h| < \delta) \Rightarrow \big(|f(x+h)-f(x)| < \varepsilon\big)\Big).$$

Nim przejdziemy do dalszych zastosowań symboliki logicznej, zanotujmy kilka prostych własności kwantyfikatorów.

Niech dana będzie funkcja zdaniowa dwóch zmiennych $\varphi(x, y)$. Zachodzą, jak łatwo sprawdzić, wzory

(26) $$\bigvee_x \bigvee_y \varphi(x,y) = \bigvee_y \bigvee_x \varphi(x,y) \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_x \bigwedge_y \varphi(x,y) = \bigwedge_y \bigwedge_x \varphi(x,y).$$

Jak widzimy więc, można zmieniać kolejność kwantyfikatorów jednoimiennych. Nie jest tak jednak w wypadku kwantyfikatorów różnoimiennych. Na przykład zmieniając we wzorze (23), który wyraża warunek na ograniczoność funkcji f, porządek kwantyfikatorów, otrzymujemy

(27) $$\bigwedge_x \bigvee_M \big(|f(x)| < M\big);$$

ten ostatni warunek jest spełniony przez każdą funkcję (a więc również przez funkcje nieograniczone); możemy się o tym przekonać, podstawiając np. $M = |f(x)|+1$.

Kolejność kwantyfikatorów $\bigvee$ i $\bigwedge$ jest więc istotna; tak np. w warunku (23) istotne jest, że liczba M nie zależy od zmiennej x; w warunku (27) jest przeciwnie: M dobieramy do każdego x osobno. Jak widać, zależność jednej wielkości od innych wyrażona jest przez kolejność kwantyfikatorów, wynika więc ona bezpośrednio z zapisu. Podobnie w definicji (24) (wyrażającej ciągłość funkcji f w punkcie x_0) kolejność kwantyfikatorów $\bigwedge_\varepsilon$ i $\bigvee_\delta$ orzeka, że δ zależy od ε (a nie odwrotnie).

Zilustrujemy to na jeszcze dwóch szczególnie pouczających przykładach, mianowicie, jednostajnej ciągłości i jednostajnej zbieżności.

Zauważmy najpierw, że zmieniając we wzorze (25) (wyrażającym ciągłość funkcji) kolejność kwantyfikatorów $\bigwedge\limits_{x}\bigwedge\limits_{\varepsilon}$, otrzymujemy zdanie równoważne (bowiem zmiana ta dotyczy kwantyfikatorów jednoimiennych, por. wzór (26)):

$$(28)\qquad \bigwedge_{\varepsilon}\bigwedge_{x}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{h}\Big((|h|<\delta)\Rightarrow\big(|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon\big)\Big).$$

Zmieniając jednak kolejność kwantyfikatorów $\bigwedge\limits_{x}\bigvee\limits_{\delta}$ we wzorze (28), otrzymujemy wzór nierównoważny, mianowicie

$$(29)\qquad \bigwedge_{\varepsilon}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{x}\bigwedge_{h}\Big((|h|<\delta)\Rightarrow\big(|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon\big)\Big).$$

Jest to warunek na jednostajną ciągłość funkcji f w rozważanym zbiorze (por. § 5.4); nie każda zaś funkcja ciągła w przedziale $a<x<b$ jest jednostajnie ciągła (np. funkcja $1/x$ jest ciągła w przedziale $0<x<1$, lecz nie jest jednostajnie ciągła w tym przedziale, por. uwagę 1, § 5.4). Wprawdzie dla przedziałów domkniętych $a\leqslant x\leqslant b$ zwykła ciągłość pociąga za sobą ciągłość jednostajną, wymaga to jednak specjalnego dowodu (aby przejść od sformułowania twierdzenia 1, § 5.4, do wzoru (29), należy zastąpić x' przez $x+h$).

Porównując wzory (28) i (29) konstatujemy, że różnią się one wyłącznie kolejnością kwantyfikatorów $\bigwedge$ i $\bigvee$. Różnica ta jednak jest bardzo istotna: kolejność $\bigvee\limits_{\delta}\bigwedge\limits_{x}$ (we wzorze (29)) wyraża niezależność liczby δ od zmiennej x, a na tym właśnie polega „jednostajność” ciągłości funkcji f.

Przejdźmy obecnie do pojęcia jednostajnej zbieżności ciągu funkcji (por. § 6.1). Niech dany będzie ciąg funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ określonych na jakimś zbiorze (np. $a<x<b$). Załóżmy, że ciąg ten jest zbieżny do funkcji f. W myśl wzoru (21) (gdzie podstawiamy $g=f(x)$, $a_n=f_n(x)$) znaczy to, że

$$(30)\qquad \bigwedge_{x}\bigwedge_{\varepsilon}\bigvee_{k}\bigwedge_{n}\Big((n>k)\Rightarrow\big(|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\big)\Big).$$

We wzorze tym porządek kwantyfikatorów $\bigwedge\limits_{x}\bigwedge\limits_{\varepsilon}$ może być, jak wiadomo zmieniony. Jeżeli natomiast zmienimy ponadto porządek kwantyfikatorów $\bigwedge\limits_{x}$ i $\bigvee\limits_{k}$, to otrzymamy wzór na jednostajną zbieżność:

$$(31)\qquad \bigwedge_{\varepsilon}\bigvee_{k}\bigwedge_{x}\bigwedge_{n}\Big((n>k)\Rightarrow\big(|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\big)\Big).$$

Kolejność kwantyfikatorów we wzorze (31) wskazuje bowiem na to, że liczba k nie zależy od x (lecz jedynie od ε), a to oznacza, że zbieżność ciągu funkcji $f_1, f_2, \ldots$ jest jednostajna.

Na zakończenie tych uwag dodajmy, że niekiedy dogodne jest posługiwanie się symboliką logiczną, a w szczególności prawami de Morgana przy dowodach prowadzonych przez sprowadzenie do niedorzeczności. Zauważmy w tym celu, że wzory de Morgana (20) dają się stosować do funkcji zdaniowych wielu zmiennych, dają one między innymi następujące wzory:

$$(32)\qquad \begin{aligned} &\sim\bigvee_x \bigwedge_y \varphi(x,y) = \bigwedge_x \bigvee_y \sim\varphi(x,y),\\ &\sim\bigwedge_x \bigvee_y \bigwedge_z \varphi(x,y,z) = \bigvee_x \bigwedge_y \bigvee_z \sim\varphi(x,y,z) \quad \text{itp.} \end{aligned}$$

Na przykład w dowodzie twierdzenia o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych w przedziale domkniętym (por. tw. 1, § 5.4) używamy warunku ciągłości jednostajnej w następującej postaci (która nie różni się istotnie od wzoru (29)):

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_x \bigwedge_{x'} \Big(\big(|x-x'|<\delta\big) \Rightarrow \big(|f(x)-f(x')|<\varepsilon\big)\Big).$$

Negacja tego warunku na podstawie wzorów (32) i (18) wygląda następująco:

$$\bigvee_\varepsilon \bigwedge_\delta \bigvee_x \bigvee_{x'} \Big(\big(|x-x'|<\delta\big) \wedge \big(|f(x)-f(x')|\geqslant\varepsilon\big)\Big).$$

Dalszy ciąg dowodu pozostaje nie zmieniony.

Zadania

1. Udowodnić, że suma dwóch ciągów jednostajnie zbieżnych funkcji ciągłych jest jednostajnie zbieżna. Udowodnić to samo dla iloczynu przy założeniu, że $a \leqslant x \leqslant b$. Pokazać, że twierdzenie to jest fałszywe dla przedziałów otwartych, biorąc pod uwagę przykład

$$f_n(x) = x\left(1-\frac{1}{n}\right), \qquad g_n(x) = \frac{1}{x^2}.$$

2. Udowodnić, że promień zbieżności r szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ spełnia *wzór Cauchy-Hadamarda*:

$$\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Niech dany będzie ciąg funkcji ciągłych $f_1, f_2, \ldots$ w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$. Udowodnić, że na to, aby ten ciąg był jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x)$, potrzeba i wystarcza, aby warunek $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ pociągał za sobą $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

4. Zbadać jednostajną zbieżność ciągów funkcji

$$f_n(x) = x^n(1-x^n), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \qquad \text{oraz} \qquad f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad 0<x\leqslant 1.$$

5. Udowodnić, że szereg

$$S(x) = x(1-x) - x(1-x) + \ldots + x^n(1-x) - x^n(1-x) + \ldots$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $0\leqslant x\leqslant 1$.

Przestawić tak wyrazy tego szeregu, aby otrzymać szereg zbieżny niejednostajnie w tym przedziale.

ROZDZIAŁ III

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 7. Pochodne rzędu pierwszego

7.1. Definicje[1]. Niech funkcja f dana będzie w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt a. *Pochodną funkcji f w punkcie a* nazywamy granicę

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Funkcję

$$g(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

której granicę rozpatrujemy dla h dążącego do 0, nazywamy *ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie a dla przyrostu h.*

Pochodną zapisujemy symbolicznie jak następuje:

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

lub krócej $f'(a)$. Krócej jeszcze, przyjmując $y=f(x)$, oznaczamy pochodną funkcji f w dowolnym punkcie x przez $\frac{dy}{dx}$ (pochodna „dy po dx"). Przy tej symbolice (pochodzącej od Leibniza) pochodna przedstawiona jest jako iloraz dwóch różniczek dy i dx (por. § 7.13). Można jednak symbol $\frac{dy}{dx}$ traktować jako jedną całość, nie przypisując różniczkom znaczenia wielkości matematycznych.

Geometrycznie interpretuje się pochodną jak następuje (rys. 11). Niech dana będzie krzywa $y=f(x)$. Przeprowadźmy prostą przez punkty $(a,f(a))$ i $(a+h,f(a+h))$ przy ustalonej dodatniej wartości h. Prostą tę nazywamy *sieczną* względem danej krzywej. Iloraz różnicowy $g(h)$ jest,

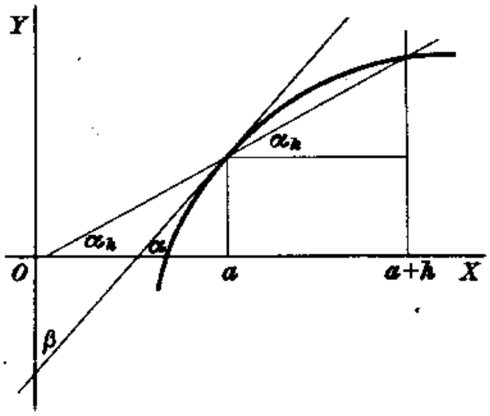
---

[1] Rachunek różniczkowy i całkowy został stworzony przez Newtona i Leibniza pod koniec XVII wieku.

jak łatwo widać, tangensem kąta α_h, który sieczna zorientowana według rosnących odciętych tworzy z kierunkiem dodatnim osi X. Graniczne położenie, do którego zmierza sieczna, gdy h dąży do 0, uważać będziemy za położenie *stycznej*. A zatem

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{2}$$

gdzie α jest kątem utworzonym przez kierunek dodatni stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie a z kierunkiem dodatnim osi X.



Rys. 11

Nie każda funkcja ciągła posiada pochodną, czyli nie każda krzywa posiada w każdym punkcie styczną. Na przykład funkcja $f(x) = |x|$ nie posiada pochodnej w punkcie 0. W tym bowiem wypadku

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{h\to-0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1.$$

W danym wypadku możemy mówić o pochodnych *jednostronnych*, które są odpowiednio równe 1 i -1. Ogólnie, nazywamy pochodną *prawostronną*, względnie *lewostronną*, granicę prawostronną, względnie lewostronną:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad f'_-(a) = \lim_{h\to-0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{3}$$

Istnieją jednak funkcje ciągłe, które nie posiadają pochodnej nawet jednostronnej. Łatwo się przekonać, że funkcja f określona przez warunki

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) = 0 \tag{4}$$

jest ciągła, lecz nie posiada pochodnej w punkcie 0 (rys. 12).

Mianowicie podstawiając na h dwa ciągi wartości

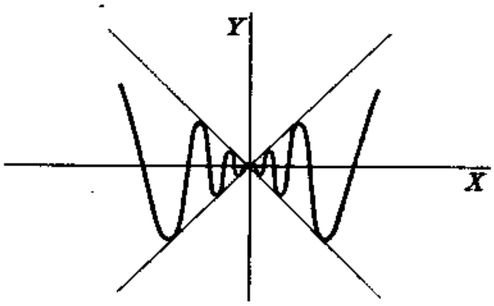
$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots \quad \text{oraz} \quad \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots,$$

otrzymujemy w granicy w pierwszym wypadku 1, a w drugim -1.

Nieistnienie pochodnej $f'(0)$ wynika również z nieistnienia granicy $\lim\limits_{x=0} \sin\frac{1}{x}$. Mielibyśmy bowiem

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h=0} \sin\frac{1}{h}$$

(por. (8), § 4.5).



Rys. 12

Istnieją jeszcze bardziej osobliwe funkcje ciągłe, mianowicie pozbawione pochodnych w każdym punkcie; przedstawiają one więc krzywe ciągłe, które w żadnym punkcie nie posiadają stycznej.

Prócz pochodnych skończonych rozważamy też pochodne nieskończone. Udowodnimy np., że

$$\left(\frac{d\sqrt[3]{x}}{dx}\right)_{x=0} = \infty, \quad \left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right)_{x=+0} = \infty.$$

Istotnie,

$$\left(\frac{d\sqrt[3]{x}}{dx}\right)_{x=0} = \lim_{h=0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty,$$

bo $\lim\limits_{h=0} h^{2/3} = 0$. Analogicznie $\lim\limits_{h=+0} \sqrt{h} = +0$, skąd drugi wzór.

Mówimy, że funkcja jest *różniczkowalna* w przedziale otwartym, jeśli posiada pochodną skończoną w każdym punkcie tego przedziału; mówiąc, że funkcja jest różniczkowalna w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$, zakładamy, że posiada pochodną w każdym punkcie wewnątrz przedziału, a pochodną jednostronną na krańcach tego przedziału.

Podobnie założenie ciągłości pochodnej $f'(x)$ w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ oznacza, że pochodna ta jest ciągła wewnątrz przedziału (ab), pochodna prawostronna jest ciągła prawostronnie w punkcie a, a lewostronna lewostronnie w punkcie b.

Przez *normalną* do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x, f(x))$ rozumiemy prostą prostopadłą do stycznej w tym punkcie i przechodzącą przez ten punkt.

Zgodnie z wyżej podaną interpretacją geometryczną pochodnej, styczna do krzywej w punkcie (x, y), gdzie $y = f(x)$, wyraża się równaniem

$$(5)\qquad \frac{Y-y}{X-x} = f'(x), \quad \text{względnie} \quad X = x, \quad \text{jeśli} \quad f'(x) = \infty,$$

gdzie X i Y oznaczają współrzędne bieżące stycznej.

Równaniem normalnej do krzywej w punkcie (x, y) jest więc:

$$(6)\qquad \frac{X-x}{Y-y} = -f'(x), \quad \text{względnie} \quad Y = y, \quad \text{jeśli} \quad f'(x) = \infty.$$

Prócz interpretacji geometrycznej pochodna posiada ważne interpretacje w fizyce. W szczególności *prędkość* punktu poruszającego się po linii prostej wyraża się jako pochodna drogi względem czasu: $v = ds/dt$, gdzie droga jest wyrażona jako funkcja czasu: $s = f(t)$. Prędkość więc w chwili t jest to granica prędkości przeciętnej w czasie od t do $t+h$, gdy h dąży do 0; tą bowiem prędkością przeciętną jest iloraz różnicowy.

7.2. Różniczkowanie funkcji elementarnych. Zauważmy przede wszystkim, że zachodzi

TWIERDZENIE 1. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to jest w tym punkcie ciągła.*

Istotnie, ponieważ granica

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

z założenia istnieje (i jest skończona), przeto

$$\lim_{h=0}\big(f(x+h)-f(x)\big) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \lim_{h=0} h = 0,$$

skąd

$$\lim_{h=0} f(x+h) = f(x),$$

co oznacza, że funkcja f jest ciągła w punkcie x.

TWIERDZENIE 2. *Niech funkcja f ma wartość stałą: $f(x) = c$. Wówczas*

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Mamy bowiem $f(x+h) = c = f(x)$, skąd

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0\,.$$

TWIERDZENIE 3. $\dfrac{dx}{dx} = 1$.

Istotnie,

$$\lim_{h=0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h=0} \frac{h}{h} = 1\,.$$

Następujące wzory dotyczą różniczkowania sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji $y = f(x)$ i $z = g(x)$, różniczkowalnych w danym punkcie x:

TWIERDZENIE 4. $\dfrac{d(y\pm z)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} \pm \dfrac{dz}{dx}$.

TWIERDZENIE 5. $\dfrac{d(yz)}{dx} = y\dfrac{dz}{dx} + z\dfrac{dy}{dx}$.

TWIERDZENIE 6. $\dfrac{d(y/z)}{dx} = \dfrac{z\dfrac{dy}{dx} - y\dfrac{dz}{dx}}{z^2}$ (*jeżeli* $z \neq 0$).

TWIERDZENIE 6'. $\dfrac{d(1/z)}{dx} = -\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{dz}{dx}$ (*o ile* $z \neq 0$).

Dowód twierdzenia 4 wynika z układu równości

$$\frac{d(y+z)}{dz} = \lim_{h=0} \frac{\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h=0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

Dowód dla różnicy jest analogiczny.

W dowodzie twierdzenia 5 oprzemy się na ciągłości funkcji f w punkcie x (por. tw. 1); mamy więc $\lim\limits_{h=0} f(x+h) = f(x)$. Otóż

$$\frac{d(yz)}{dz} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\big(f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)\big)+\big(f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\big)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} f(x+h) \lim_{h=0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx}.$$

Aby udowodnić twierdzenie 6, udowodnimy najpierw twierdzenie 6'. Mamy

$$\frac{d(1/z)}{dx} = \lim_{h=0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lim\limits_{h=0} g(x+h)}\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{h=0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx},$$

bo $\lim\limits_{h=0} g(x+h) = g(x) = z$ (przy czym ze względu na to, że $g(x) \neq 0$, istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta$ jest $g(x+h) \neq 0$).

Twierdzenia 5 i 6' pociągają za sobą twierdzenie 6:

$$\frac{d(y/z)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{z}\right) = y\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)$$

(w pierwszej z powyższych równości używamy znakowania $\frac{d}{dx}F(x)$ zamiast $\frac{dF(x)}{dx}$).

Podstawiając w twierdzeniach 4 i 5 $g(x) = c$, otrzymujemy natychmiast:

TWIERDZENIE 4'. $\dfrac{d(y+c)}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$.

TWIERDZENIE 5'. $\dfrac{d(cy)}{dx} = c\dfrac{dy}{dx}$.

Twierdzenie 4' oznacza, że przesunięcie krzywej równoległe do osi Y nie wpływa na wartość kąta utworzonego przez styczną z osią X; twierdzenie 5' oznacza, że zmiana skali na osi Y wpływa w tym samym stosunku na zmianę tangensa rozważanego kąta.

Stosując twierdzenie 5 i zasadę indukcji, dowodzimy z łatwością, że dla wykładników naturalnych $n \geqslant 2$ zachodzi wzór

TWIERDZENIE 7. $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$.

Jak widać natychmiast, wzór ten obowiązuje również dla $n = 0$ i dla $n = 1$, jeśli przyjąć, że dla $n = 0$ należy, w wypadku gdy $x = 0$, zastąpić prawą stronę wzoru przez 0, a dla $n = 1$ — przez 1 (jak to bezpośrednio wykazują twierdzenia 2 i 3).

Wzór pozostaje również w mocy dla n całkowitych ujemnych (gdy $x \neq 0$). W tym bowiem wypadku mamy na mocy 6' i 7:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\frac{1}{x^{-2n}}\cdot\frac{d(x^{-n})}{dx} = \frac{n}{x^{-2n}}x^{-n-1} = nx^{n-1}.$$

Wzór 7 uogólnimy następnie na dowolne wykładniki rzeczywiste (dla $x > 0$).

Ze wzorów dotychczas udowodnionych z łatwością wyprowadzamy wzór na pochodną wielomianu

TWIERDZENIE 8. $\frac{d}{dx}(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n) = a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$.

Obliczymy obecnie pochodne funkcji trygonometrycznych.

TWIERDZENIE 9. $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$.

TWIERDZENIE 10. $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$.

TWIERDZENIE 11. $\frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Dowód twierdzenia 9 oprzemy na znanym z trygonometrii wzorze na różnicę sinusów i na wzorze $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ (por. (5), § 4.5). Otóż

$$\frac{d\sin x}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\sin(x+h)-\sin x\big) = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cdot\sin\tfrac{1}{2}h\cdot\cos(x+\tfrac{1}{2}h) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{1}{2}h) = \cos x$$

ze względu na ciągłość funkcji $\cos x$.

Podobnie

$$\frac{d\cos x}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\cos(x+h)-\cos x\big) = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{h}\cdot\sin\tfrac{1}{2}h\cdot\sin(x+\tfrac{1}{2}h) =$$
$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cdot\lim_{h\to 0}\sin(x+\tfrac{1}{2}h) = -\sin x.$$

Twierdzenia 9 i 10 na mocy 6 pociągają za sobą twierdzenie 11. Mamy bowiem

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos x\frac{d\sin x}{dx} - \sin x\frac{d\cos x}{dx}\right) =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}(\cos^2 x+\sin^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

TWIERDZENIE 12. $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$; *ogólniej* $\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{x\log a}$.

Istotnie, na mocy ogólnych własności logarytmu (por. (10) i (11), § 5.4):

$$\frac{1}{h}\big(\log(x+h)-\log x\big) = \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\log\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right].$$

Podstawmy $y = h/x$. Ponieważ $\lim\limits_{h=0} y = 0$, więc mamy (por. (16), § 4.6):

$$\lim_{h=0}\frac{1}{h}\left(\log(x+h)-\log x\right) = \frac{1}{x}\lim_{h=0}\log\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right] = \frac{1}{x}\lim_{y=0}\log(1+y)^{1/y}.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{y=0}(1+y)^{1/y} = e$ (por. (19), § 4.6) i ponieważ $\log z$ jest funkcją ciągłą w punkcie $z = e$, więc (por. (6), § 5.3):

$$\lim_{y=0}\log(1+y)^{1/y} = \log\lim_{y=0}(1+y)^{1/y} = \log e = 1.$$

A zatem

$$\frac{d\log x}{dx} = \lim_{h=0}\frac{1}{h}\left(\log(x+h)-\log x\right) = \frac{1}{x}.$$

Druga część twierdzenia 12 wynika z pierwszej na podstawie 5'

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{\log a}\right) = \frac{1}{\log a}\cdot\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x\log a}.$$

Dalsze wzory na różniczkowanie funkcji elementarnych wyprowadzimy z ogólnego wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.

7.3. Różniczkowanie funkcji odwrotnych. Niech dana będzie funkcja różniczkowalna i różnowartościowa $y = f(x)$ w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Jak wiadomo (por. tw. 1 i 2, § 5.5), istnieje wówczas funkcja $x = g(y)$ odwrotna względem danej i ciągła w przedziale $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, względnie $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$ (w zależności od tego czy funkcja f jest rosnąca, czy malejąca). Udowodnimy, że w przedziale tym funkcja g jest różniczkowalna. Mianowicie:

TWIERDZENIE 1. $\dfrac{dx}{dy} = 1 : \dfrac{dy}{dx}$, *o ile* $\dfrac{dy}{dx} \neq 0$.

Przy danym x przyjmijmy $k = f(x+h)-f(x)$. A zatem $f(x+h) = y+k$, tj. $x+h = g(y+k)$, skąd $h = g(y+k)-g(y)$. Przy zmiennym k przyrost h jest funkcją k. Ze względu na ciągłość funkcji g, mamy $\lim\limits_{k=0} h = 0$; przy tym dla $k \neq 0$ mamy $h \neq 0$, bo funkcja g jest różnowartościowa. Stosując wzór (16) z § 4.6 otrzymujemy

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{k=0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \lim_{h=0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \lim_{h=0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

Uwaga 1. Na krańcach przedziału zmienności y-ów, tj. w punktach $f(a)$ i $f(b)$, mamy do czynienia z pochodną jednostronną. Wzór nasz przybiera wówczas następującą postać:

TWIERDZENIE 1'. $\dfrac{dx}{dy_{\pm}} = 1 : \dfrac{dy}{dx_{\pm}}$,

przy czym znaki są zgodne dla funkcji rosnących, przeciwne — dla funkcji malejących.

Jeśli bowiem funkcja f jest rosnąca, to również funkcja g jest rosnąca i wówczas przyrosty h i k mają ten sam znak i w konsekwencji $\lim\limits_{k=+0} h = +0$ oraz $\lim\limits_{k=-0} h = -0$. Natomiast, jeżeli funkcja f jest malejąca, to $\lim\limits_{k=+0} h = -0$ i $\lim\limits_{k=-0} h = +0$.

Uwaga 2. Geometrycznie twierdzenie 1 można zilustrować jak następuje. Oznaczmy przez α kąt utworzony przez styczną do krzywej z osią X, a przez β kąt utworzony przez tę styczną z osią Y (patrz rys. 11, str. 102). Wówczas $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$, tj. $\operatorname{tg}\beta = 1/\operatorname{tg}\alpha$, zgodnie ze wzorem twierdzenia 1.

Uwaga 3. Twierdzenie 1 wskazuje na dogodność posługiwania się symboliką Leibniza: przy przejściu do funkcji odwrotnej pochodna dy/dx zachowuje się jak ułamek.

Przejdziemy obecnie do zastosowań twierdzenia 1 przy różniczkowaniu funkcji elementarnych.

Twierdzenie 2. $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$.

Ogólniej:

Twierdzenie 2'. $\dfrac{da^x}{dx} = a^x \log a$.

Przyjmijmy $y = e^x$, skąd $x = \log y$. Ponieważ na mocy twierdzenia 12 z § 7.2 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}$, przeto $\dfrac{dy}{dx} = 1 : \dfrac{dx}{dy} = y$. Podstawiając $y = e^x$, otrzymujemy twierdzenie 2.

Dowód twierdzenia 2' jest zupełnie analogiczny.

Twierdzenie 3. $\dfrac{d\arcsin x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Twierdzenie 4. $\dfrac{d\arccos x}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Twierdzenie 5. $\dfrac{d\operatorname{arctg} x}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Istotnie, przyjmijmy $y = \arcsin x$, tj. $x = \sin y$. Mamy więc

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

(przy czym pierwiastek ma znak $+$ ze względu na to, że $-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$, zgodnie z definicją funkcji $\arcsin x$, por. § 4.4). Stąd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Podobnie, przyjmując $y = \arccos x$, tj. $x = \cos y$, mamy

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wreszcie, dla $y = \operatorname{arctg} x$, mamy $x = \operatorname{tg} y$, a zatem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1+\operatorname{tg}^2 y = 1+x^2, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nim przejdziemy do wzorów dotyczących superponowania powyżej rozpatrywanych funkcji elementarnych, udowodnimy kilka ogólnych twierdzeń o pochodnych.

7.4. Ekstrema funkcji. Twierdzenie Rolle'a. Niech funkcja f określona będzie w otoczeniu punktu a (tj. w jakimś przedziale zawierającym ten punkt wewnątrz). Jeżeli istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność $|h| < \delta$ pociąga za sobą nierówność

$$f(a+h) \leqslant f(a), \tag{7}$$

to mówimy, że funkcja f ma *maksimum* w punkcie a.

Jeśli zaś nierówność $|h| < \delta$ pociąga za sobą

$$f(a+h) \geqslant f(a), \tag{8}$$

to mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *minimum*.

Inaczej mówiąc, w punkcie a występuje maksimum (względnie minimum) funkcji f, jeśli istnieje taki przedział otaczający punkt a, że $f(a)$ jest największą (względnie najmniejszą) spośród wartości, jakie funkcja f przyjmuje w tym przedziale.

Jeżeli we wzorach (7) i (8) zastąpić znaki $\leqslant$ i $\geqslant$ przez $<$ i $>$, to mamy do czynienia z *właściwym* maksimum i minimum.

Maksima i minima obejmujemy ogólną nazwą *ekstremów* funkcji f.

Przykłady. Funkcja x^2 posiada minimum w punkcie 0; funkcja $\sin x$ przyjmuje na przemian maksimum i minimum w punktach, które są nieparzystymi wielokrotnościami $\frac{1}{2}\pi$.

Odnośnie związku pojęcia ekstremum funkcji z pojęciem kresu górnego i dolnego funkcji, zauważmy przede wszystkim, że pojęcie ekstremum jest pojęciem **lokalnym**, a pojęcie kresu funkcji jest pojęciem **integralnym**: mówimy o ekstremum funkcji w danym punkcie, zaś o kresie funkcji w danym przedziale; ażeby orzec, czy funkcja f w punkcie a posiada ekstremum, wystarczy znać wartości funkcji w dowolnym otoczeniu punktu a, natomiast gdy chodzi o kres górny funkcji w przedziale, należy znać zachowanie się funkcji w całym przedziale.

Z definicji wynika natychmiast, że

TWIERDZENIE 1. *Jeśli funkcja f określona w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, osiąga kres górny w punkcie c położonym wewnątrz tego przedziału (tj. $a < c < b$), to funkcja w tym punkcie posiada też maksimum.*

Analogiczne twierdzenie dotyczy kresu dolnego i minimum.

Jeśli natomiast kres górny funkcji wypada w jednym z końców przedziału ab, to nie jest to maksimum funkcji, bo funkcja nie jest określona w żadnym otoczeniu krańców tego przedziału. Na przykład funkcja $y = x$ rozpatrywana w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ posiada kres górny w punkcie 1; nie jest to jednak maksimum.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i posiada w tym punkcie ekstremum, to $f'(c) = 0$.*

Załóżmy, że funkcja posiada w punkcie c maksimum (rozumowanie w wypadku minimum jest analogiczne). Niech więc liczba $\delta > 0$ będzie tak dobrana, ażeby dla $|h| < \delta$ zachodziła nierówność $f(c+h)-f(c) \leqslant 0$. A zatem

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad h > 0, \qquad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad h < 0.$$

Ponieważ zaś z założenia istnieje pochodna $f'(c)$, a więc

$$f'_+(c) = f'(c) = f'_-(c).$$

Zarazem z poprzednich nierówności wynika: $f'_+(c) \leqslant 0 \leqslant f'_-(c)$. Stąd

$$f'_+(c) = 0 = f'_-(c), \quad \text{tj.} \quad f'(c) = 0.$$

Uwaga 1. Twierdzenie odwrotne nie zachodzi: równość $f'(c) = 0$ może być spełniona, pomimo że w punkcie c funkcja nie posiada ekstremum. Jest tak na przykład dla funkcji x^3 w punkcie 0.

Geometrycznie istnienie ekstremum funkcji f w punkcie c oznacza więc (w wypadku, gdy funkcja jest różniczkowalna), że styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do osi X (względnie z osią X się pokrywa).

TWIERDZENIE 3 (ROLLE'A). *Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz $f'(c) = 0$.*

Istotnie, jeśli funkcja f jest stała, to również $f'(x) = 0$ dla każdego x leżącego między a i b; można więc w tym wypadku na c przyjąć którykolwiek z tych x-ów.

Załóżmy więc, że funkcja f nie jest stała, np. że przyjmuje wartości większe od $f(a)$. Oznaczając przez M kres górny tej funkcji, mamy więc $M > f(a)$. W myśl twierdzenia Weierstrassa (por. tw. 2, § 5.4) istnieje takie c w przedziale ab, że $f(c) = M$. Przy tym $a \neq c \neq b$, ponieważ z założenia $f(a) = f(b)$. A zatem $a < c < b$. Znaczy to, że funkcja f osiąga kres górny w punkcie c położonym wewnątrz przedziału ab; w myśl twierdzenia 1, funkcja f posiada więc w tym punkcie maksimum i w myśl twierdzenia 2: $f'(c)=0$.

Geometrycznie twierdzenie Rolle'a posiada treść szczególnie sugestywną: jeżeli krzywa (posiadająca w każdym punkcie styczną) przecina prostą równoległą do osi X w dwóch punktach, to w pewnym punkcie tej krzywej styczna jest równoległa do osi X.

Uwaga 2. Twierdzeniu Rolle'a nadajemy również postać następującą: jeśli $f(x)=f(x+h)$, to istnieje takie θ, że

$$f'(x+\theta h)=0, \quad 0<\theta<1, \tag{9}$$

przy czym czynimy te same założenia dotyczące ciągłości i różniczkowalności, co w twierdzeniu Rolle'a (natomiast nie zakładamy, że $h>0$, lecz jedynie, że $h\neq 0$).

7.5. Twierdzenia Lagrange'a[1] **i Cauchy'ego.** Załóżmy, jak w twierdzeniu Rolle'a, że funkcja f jest ciągła w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Zachodzi wówczas tzw. *wzór na wartość średnią* (*Lagrange'a*) (zwany też *twierdzeniem „o przyrostach skończonych"*):

TWIERDZENIE 1. $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a+\theta h),$$

gdzie $h=b-a$ oraz θ jest odpowiednio dobraną liczbą taką, że $0<\theta<1$.

Nim przystąpimy do dowodu, zinterpretujemy geometrycznie to twierdzenie. Lewa strona oznacza tangens kąta α, który tworzy z osią X prosta, łącząca punkty $(a,f(a))$ i $(b,f(b))$. Twierdzenie więc orzeka, że istnieje styczna do krzywej, która jest równoległa do tej prostej („siecznej do krzywej"). Szczególnym wypadkiem, mianowicie gdy sieczna ta jest równoległa do osi X, jest twierdzenie Rolle'a. Do tego też twierdzenia sprowadzimy dowód twierdzenia Lagrange'a.

Poprowadźmy przez dowolny punkt x mieszczący się między a i b prostą równoległą do osi Y (patrz rys. 13) i oznaczmy przez $g(x)$ długość odcinka tej prostej zawartego między krzywą a wyżej określoną sieczną. Długość odcinka zawartego między osią X a sieczną jest więc równa $g(x)+f(x)$. Zarazem długość ta równa się $f(a)+(x-a)\operatorname{tg}\alpha$, skąd

$$g(x)=f(a)-f(x)+(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{10}$$

Funkcja g spełnia założenia twierdzenia Rolle'a. Jest ona ciągła w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$, różniczkowalna

$$g'(x)=-f'(x)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

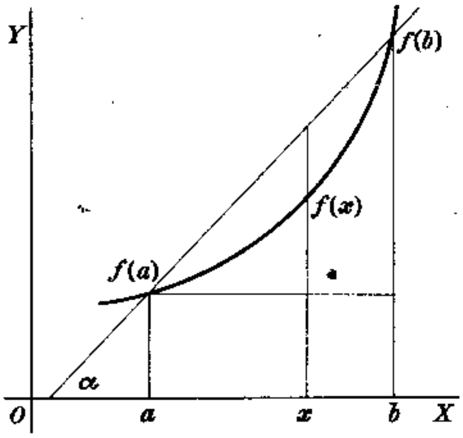
[1] J. L. Lagrange (1736-1813) — najznakomitszy matematyk XVIII wieku, jeden z twórców teorii równań różniczkowych.

oraz $g(a) = 0 = g(b)$. A zatem funkcja $g'(x)$ znika w pewnym punkcie pomiędzy a i b. Inaczej mówiąc, istnieje takie θ, że $0 < \theta < 1$ oraz

$$g'(a+\theta h) = 0, \quad \text{tj.} \quad 0 = -f'(a+\theta h) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór z twierdzenia 1.

Uwaga 1. Rozważania geometryczne miały tu charakter heurystyczny; wyjaśniają one, dlaczego wprowadza się funkcję g. Sam dowód twierdzenia Lagrange'a można jednak było rozpocząć od określenia funkcji g za pomocą wzoru (10).



Rys. 13

Uwaga 2. Analogicznie do wzoru (9), można twierdzeniu 1 dać kształt następujący:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h). \tag{11}$$

Twierdzenie Lagrange'a pociąga za sobą następujące dwa wnioski, mające podstawowe znaczenie dla rachunku całkowego.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego x położonego wewnątrz przedziału ab, to funkcja f ma w tym przedziale wartość stałą.*

Mamy bowiem dla każdego x i h na mocy (11): $f(x+h) = f(x)$, co oznacza, że funkcja f ma wartość stałą.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli dla $a < x < b$ mamy stale $f'(x) = g'(x)$, to $f(x) = g(x) + \text{const}$, tj. funkcje f i g różnią się między sobą o stałą.*

Istotnie, $\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x) = 0$, co oznacza, że funkcja $f(x) - g(x)$ ma pochodną stale równą 0. Na mocy twierdzenia 2 funkcja ta jest stała. Przyjmując $f(x) - g(x) = C$, mamy $f(x) = g(x) + C$.

Uwaga 3. Jeżeli w twierdzeniu 2 założyć dodatkowo, że funkcja f jest ciągła w całym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, to f ma wartość stałą również w całym tym przedziale. Można bowiem w dowodzie podstawić $x = a$.

Analogiczna uwaga dotyczy twierdzenia 3.

Twierdzenie Lagrange'a daje się uogólnić jak następuje:

Twierdzenie 4 (Cauchy'ego). *Jeżeli funkcje f i f_1 są ciągłe w całym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, a wewnątrz różniczkowalne i jeżeli $f_1'(x) \neq 0$ dla żadnego x, to*

$$\frac{f(b)-f(a)}{f_1(b)-f_1(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{f_1'(a+\theta h)}, \quad 0 < \theta < 1, \tag{12}$$

gdzie $h = b-a$.

Z twierdzenia Cauchy'ego otrzymuje się twierdzenie Lagrange'a, podstawiając $f_1(x) = x$. Odwrotnie, aby udowodnić twierdzenie Cauchy'ego, zastąpmy funkcję g ze wzoru (10) przez funkcję następującą:

$$g_1(x) = f(a)-f(x)+\big(f_1(x)-f_1(a)\big)\frac{f(b)-f(a)}{f_1(b)-f_1(a)}.$$

(Zauważmy, że $f_1(b) \neq f_1(a)$ ze względu na założenie $f_1'(x) \neq 0$ i twierdzenie Rolle'a).

Funkcja ta spełnia założenia twierdzenia Rolle'a

$$g_1'(x) = -f'(x)+f_1'(x)\frac{f(b)-f(a)}{f_1(b)-f_1(a)}, \quad g_1(a) = 0 = g_1(b). \tag{13}$$

A zatem istnieje takie θ między 0 i 1, że $g_1'(a+\theta h) = 0$. Podstawiając $x = a+\theta h$ we wzorze (13), otrzymujemy równość (12).

Analogicznie do wzorów (9) i (11), z twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f_1(x+h)-f_1(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{f_1'(x+\theta h)}. \tag{14}$$

Uwaga 4. We wzorze Cauchy'ego istotne jest to, że θ oznacza tę samą liczbę w liczniku i mianowniku. Bezpośrednie zastosowanie twierdzenia 1 do funkcji f i do funkcji f_1 i utworzenie ilorazu otrzymanych wyrażeń prowadzi do różnych (na ogół) liczb θ w liczniku i mianowniku.

7.6. Różniczkowanie funkcji złożonych. Niech $y = f(x)$, $z = g(y)$, przy tym funkcja g jest określona dla wartości y funkcji f, wreszcie funkcje f i g są różniczkowalne i pochodna g' jest ciągła. Następujący wzór określa pochodną funkcji złożonej $g\big(f(x)\big)$ w zależności od pochodnych f' i g'.

TWIERDZENIE 1.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},\quad \text{tzn. (}^1\text{)}\quad \frac{dgf(x)}{dx}=\left[\frac{dg(y)}{dy}\right]_{y=f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx}.$$

Przy danym x i $h\neq 0$ weźmy $k=f(x+h)-f(x)$, tj. $f(x+h)=y+k$. Stosując wzór (11) na wartość średnią do funkcji g, otrzymujemy

$$\frac{gf(x+h)-gf(x)}{h}=\frac{g(y+k)-g(y)}{h}=g'(y+\theta k)\frac{k}{h}=g'(y+\theta k)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Aby otrzymać twierdzenie 1, należy przejść do granicy dla h dążącego do 0. Otóż ze względu na ciągłość funkcji g, mamy $\lim\limits_{h\to 0}k=0$, a ponieważ $0<\theta<1$, więc i $\lim\limits_{h\to 0}\theta k=0$ (zauważmy, że θ jest również funkcją zmiennej h). A zatem $\lim\limits_{h\to 0}(y+\theta k)=y$, co ze względu na ciągłość funkcji g' daje

$$\lim_{h\to 0}g'(y+\theta k)=g'(y)=g'\big(f(x)\big).$$

W rezultacie,

$$\frac{dgf(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{gf(x+h)-gf(x)}{h}=\lim_{h\to 0}g'(y+\theta k)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$
$$=g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

Uwaga 1. Twierdzenie jest prawdziwe również bez założenia ciągłości funkcji g'. Wymaga jednak wówczas innego, bardziej skomplikowanego dowodu.

ZASTOSOWANIA. Wzór z twierdzenia 1 pozwala na następujące uogólnienie wzoru twierdzenia 7 z § 7.2; dla każdego rzeczywistego a i dodatniego x zachodzi

TWIERDZENIE 2.

$$\frac{dx^a}{dx}=ax^{a-1}.$$

Mamy bowiem $x^a=e^{a\log x}$, a więc przyjmując $z=e^y$ i $y=a\log x$, znajdujemy

$$\frac{dx^a}{dx}=\frac{de^y}{dy}\cdot\frac{d(a\log x)}{dx}=e^y\frac{a}{x}=x^a\frac{a}{x}=ax^{a-1}.$$

Powyższy rachunek można było jeszcze zapisać w taki sposób:

$$\frac{dx^a}{dx}=\frac{de^{a\log x}}{d(a\log x)}\cdot\frac{d(a\log x)}{dx}=e^{a\log x}\frac{a}{x}=x^a\frac{a}{x}=ax^{a-1}.$$

(1) Dla krótkości piszemy $gf(x)$ zamiast $g(f(x))$.

TWIERDZENIE 3.

$$\frac{dx^x}{dx} = x^x(\log x+1).$$

Bowiem

$$\frac{dx^x}{dx} = \frac{de^{x\log x}}{dx} = \frac{de^{x\log x}}{d(x\log x)}\cdot\frac{d(x\log x)}{dx} = e^{x\log x}(\log x+1) = x^x(\log x+1).$$

Zauważmy też, że poprzednio udowodnione twierdzenie 2′ z § 7.3: $\frac{da^x}{dx} = a^x\log a$ można było w analogiczny sposób udowodnić, przyjmując $a^x = e^{x\log a}$.

W praktyce stosujemy nieraz twierdzenie 1 kilkakrotnie; np. gdy $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = h(z)$, pochodną

$$\frac{dh\big(g(f(x))\big)}{dx}$$

obliczamy, opierając się na równości

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Jak widać, pochodne we wzorze powyższym zachowują się jak ułamki.

TWIERDZENIE 4.

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Wyrażenie to nazywamy *pochodną logarytmiczną* funkcji f. Znajomość pochodnej logarytmicznej daje natychmiast pochodną zwykłą. Stwierdzić to łatwo na przykładzie funkcji $y = x^x$ (gdzie różniczkujemy $\log y = x\log x$).

PRZYKŁAD 1.

$$\frac{d\log\sin(x^2)}{dx} = \frac{d\log\sin(x^2)}{d\sin(x^2)}\cdot\frac{d\sin(x^2)}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{dx} =$$

$$= \frac{1}{\sin(x^2)}\cos(x^2)2x = 2x\operatorname{ctg}(x^2).$$

PRZYKŁAD 2. **Pochodne funkcji hiperbolicznych.** Przez *sinus* i *cosinus hiperboliczny* rozumiemy funkcje (rys. 14 i 15):

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{oraz} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{15}$$

Aby znaleźć ich pochodne, zauważmy, że

$$\frac{de^{-x}}{dx} = \frac{de^{-x}}{d(-x)}\cdot\frac{d(-x)}{dx} = -e^{-x}.$$

Stąd z łatwością znajdujemy

$$\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x, \qquad \frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x. \tag{16}$$

Przyjmijmy jeszcze (rys. 16):

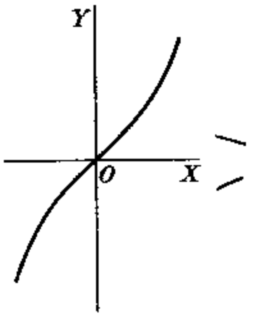
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \tag{17}$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić,

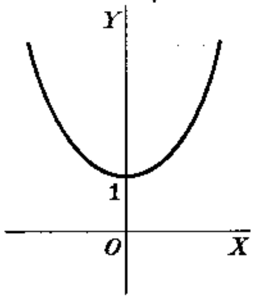
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tag{18}$$

więc

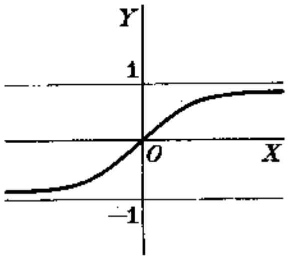
$$\frac{d\operatorname{tgh} x}{dx} \frac{d\dfrac{\sinh x}{\cosh x}}{dx} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}. \tag{19}$$



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

Funkcje $\sinh x$ i $\cosh x$ posiadają funkcje odwrotne. Niech bowiem $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Wówczas

$$e^x - e^{-x} - 2y = 0, \quad \text{stąd} \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

skąd

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}, \quad \text{a więc} \quad x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

(wartości $y - \sqrt{y^2+1}$ nie uwzględniamy jako ujemnej). Wyraziliśmy w ten sposób x jako funkcję y. Jest to żądana funkcja odwrotna względem $\sinh x$. Oznaczamy tę funkcję symbolem arsinh (rys. 17):

$$\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}). \tag{20}$$

Podobnie znajdujemy funkcję odwrotną względem $\cosh x$ $(x \geqslant 0)$, którą oznaczamy symbolem arcosh (rys. 18). Mianowicie,

$$\operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geqslant 1. \tag{21}$$

Analogicznie funkcją odwrotną do $\cosh x$ $(x \leqslant 0)$ jest

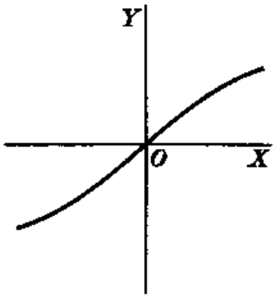
$$\operatorname{arcosh} x = \log(x - \sqrt{x^2-1}), \qquad x \geqslant 1.$$

Opierając się na wzorach (16) i na wzorze na pochodną funkcji odwrotnej, z łatwością znajdujemy

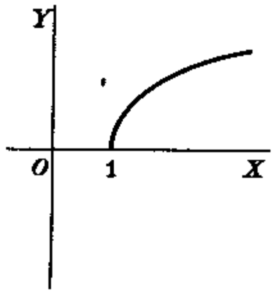
$$\frac{d \operatorname{arsinh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+1}), \tag{22}$$

$$\frac{d \operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \frac{d}{dx}\log(x\pm\sqrt{x^2-1}). \tag{23}$$

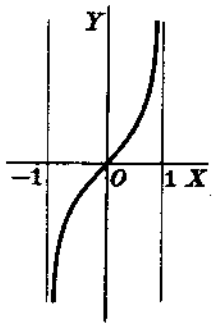
Rachunek ten można również wykonać, różniczkując funkcje występujące po prawej stronie wzorów (22) i (23).



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

Dodajmy wreszcie, że na funkcję odwrotną względem $\operatorname{tgh} x$ (rys. 19) znajdujemy wzór

$$\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1. \tag{24}$$

Stąd

$$\frac{d \operatorname{artgh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right). \tag{25}$$

Uwaga 2. Poznane przez nas w §§ 7.2 i 7.3 wzory na różniczkowanie funkcji zasadniczych pozwalają — w zestawieniu ze wzorem na różniczkowanie funkcji superponowanych — na różniczkowanie dowolnej funkcji elementarnej (a więc funkcji, którą otrzymuje się z funkcji zasadniczych przez zastosowanie dowolnej ilości superpozycji). Pochodna funkcji elementarnej jest funkcją elementarną.

Weźmy jeszcze pod uwagę następującą funkcję (nieelementarną):

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0, \qquad f(0) = 0. \tag{26}$$

Ogólne wzory na różniczkowanie funkcji elementarnych nie dają możności obliczenia $f'(0)$. Pochodną tę musimy obliczyć bezpośrednio z definicji pochodnej. Mianowicie,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

Rzecz jasna, że dla $x \neq 0$ pochodną $f'(x)$ obliczyć można na podstawie ogólnych wzorów, dotyczących różniczkowania funkcji elementarnych.

7.7. Interpretacja geometryczna znaku pochodnej. Twierdzenie Lagrange'a pozwala na ustalenie związku między znakiem pochodnej a wzrastaniem, względnie zmniejszaniem się funkcji.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli dla każdego x należącego do przedziału ab zachodzi nierówność $f'(x) > 0$, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.*
Jeśli stale $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca.

Na mocy wzoru (11) mamy dla $h > 0$: $f(x+h) > f(x)$, względnie $f(x+h) < f(x)$, w zależności od tego czy zakładamy, że pochodna jest stale dodatnia, czy stale ujemna. W pierwszym wypadku funkcja f rośnie, w drugim — maleje.

Uwaga 1. Jeśli założyć, że stale $f'(x) \geqslant 0$, względnie $f'(x) \leqslant 0$, to funkcja f jest rosnąca w szerszym sensie, względnie malejąca w szerszym sensie.

Odwrotnym do twierdzenia 1 jest twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE 2. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i rośnie (względnie maleje) w jakimś przedziale otaczającym ten punkt, to $f'(c) \geqslant 0$ (względnie $f'(c) \leqslant 0$).*

Jeśli bowiem funkcja f rośnie, to dla $h > 0$, mamy

$$f(c+h)-f(c) > 0, \quad \text{a zatem} \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$$

i przechodząc do granicy: $f'(c) \geqslant 0$.

Podobnie rozumujemy przy założeniu, że funkcja f maleje.

Z twierdzenia 1 wnosimy, że

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli $f'(c) > 0$, to funkcja jest w pewnym otoczeniu punktu c rosnąca (przy założeniu ciągłości pochodnej w punkcie c).*

Analogicznie: *jeśli $f'(c) < 0$, to funkcja jest lokalnie w punkcie c malejąca.*

Istotnie, ze względu na ciągłość funkcji f', nierówność $f'(c) > 0$ pociąga za sobą istnienie takiej liczby $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta$ zachodzi $f'(c+h) > 0$. Znaczy to, że pochodna f' jest dodatnia w każdym punkcie przedziału $c-h < x < c+h$. A zatem funkcja f jest w tym przedziale rosnąca na mocy twierdzenia 1.

Uwaga 2. Twierdzenie 3 można jeszcze w taki sposób wysłowić: jeśli $f'(c) \neq 0$, to (przy założeniu ciągłości pochodnej) funkcja f jest lokalnie w punkcie c różnowartościowa, tzn. jest różnowartościowa w pewnym przedziale $c-\delta < x < c+\delta$ $(\delta > 0)$. W przedziale tym funkcja $y = f(x)$ posiada więc funkcję odwrotną $x = g(y)$. Pochodna tej funkcji odwrotnej jest, jak już wiemy, odwrotnością pochodnej funkcji f.

Widzimy więc, że przy powyższych założeniach równanie $y = f(x)$ posiada dla danej wartości na y jedno i tylko jedno rozwiązanie w zakresie x-ów, należących do przedziału $c-\delta$, $c+\delta$.

PRZYKŁAD. Funkcja $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ maleje dla $0 < x < 1$, rośnie dla $x > 1$.

Istotnie,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Wyrażenie to jest ujemne lub dodatnie w zależności od tego czy $x < 1$, czy $x > 1$.

Stąd wynika, że $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$. Istotnie, $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{e^n}{n} = \infty$ (por. przykład 7, § 3.5), a więc funkcja e^x/x jako nieograniczona i rosnąca dąży do ∞ wraz z x (wynik ten uzyskaliśmy na innej drodze w przykładzie 2, § 4.6).

Ogólniej: dowodzimy w sposób zupełnie podobny, że funkcja $f(x) = e^x x^a$ $(x > 0)$ jest malejąca dla $x < -a$ (i $a < 0$), rosnąca dla $x > -a$. Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty} e^n n^a = \infty$ (por. przykład 7, § 3.5), przeto

(27) $$\lim_{x=\infty} e^x x^a = \infty.$$

7.8. Wyrażenia nieoznaczone. Twierdzenie Cauchy'ego z § 7.5 pozwala na obliczanie granicy postaci następującej:

(28) $$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{gdzie} \quad f(a) = 0 = g(a).$$

Wyrażenia tego rodzaju noszą nazwę *wyrażeń nieoznaczonych typu* $\frac{0}{0}$.

TWIERDZENIE. *Jeśli funkcje f i g są ciągłe w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$ i są różniczkowalne wewnątrz tego przedziału i jeśli $f(a) = 0 = g(a)$, to*

(29) $$\lim_{x=a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

przy założeniu, że ta ostatnia granica istnieje.

Przyjmijmy $x = a+h$. Należy więc dowieść, że

(30) $$\lim_{h=+0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h=+0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}.$$

Otóż równości $f(a) = 0 = g(a)$ i wzór Cauchy'ego dają

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{h=+0} \theta h = +0$, więc

$$\lim_{h=+0} \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \lim_{h=+0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)},$$

skąd otrzymujemy wzór (30).

Analogiczne twierdzenie dotyczy granicy lewostronnej.

W wypadku gdy pochodne f' i g' są ciągłe w punkcie a, przy czym $g'(a) \neq 0$, ze wzoru (29) wynika natychmiast następujący *wzór de l'Hospitala* (¹):

(31) $$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Analogiczny wzór dotyczy granicy jednostronnej i pochodnych jednostronnych.

PRZYKŁAD 1. Aby znaleźć $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$ przyjmujemy

$$f(x) = \log(1+x) \quad \text{i} \quad g(x) = x.$$

Stąd

$$f(0) = 0 = g(0), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g'(x) = 1, \quad f'(0) = 1$$

A zatem

(32) $$\lim_{x=0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

PRZYKŁAD 2. Obliczyć $\lim\limits_{x=0} \dfrac{e^x-1}{x}$. Oznaczmy $f(x) = e^x-1$ i $g(x) = x$.

Mamy więc

$$f(0) = 0 = g(0), \quad f'(x) = e^x, \quad g'(x) = 1.$$

A zatem

(33) $$\lim_{x=0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1.$$

Uwaga 1. Jeśli $g'(a) = 0$, lecz $f'(a) \neq 0$, to wzór (31) daje

$$\lim_{x=a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Jeśli natomiast $f'(a) = 0 = g'(a)$, to wzór (31) nie ma zastosowania. Należy wówczas stosować pochodne wyższych rzędów (por. § 8.4).

(¹) De l'Hospital — matematyk francuski drugiej połowy XVII wieku, znany zwłaszcza jako popularyzator rachunku różniczkowego.

Uwaga 2. Wzór (29) daje się również stosować w wypadku, gdy $a = \infty$. Inaczej mówiąc, *jeśli* $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x=\infty} g(x)$, *to*

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{34}$$

przy założeniu, że ta ostatnia granica istnieje.

Przyjmijmy $x = 1/t$ i określmy funkcję pomocniczą F zmiennej t przez warunki: $F(t) = f(1/t)$ dla $t \neq 0$ oraz $F(0) = 0$. Podobnie niech $G(t) = g(1/t)$ dla $t \neq 0$ oraz $G(0) = 0$. Dla każdego $t \neq 0$ funkcja F jest ciągła jako superpozycja dwóch funkcji ciągłych: funkcji $1/t$ i f. Jest ona również ciągła prawostronnie w punkcie 0, bowiem (por. (18), § 4.6)

$$\lim_{t=+0} F(t) = \lim_{t=+0} f(1/t) = \lim_{x=\infty} f(x) = 0 = F(0).$$

Podobnie funkcja G jest ciągła. Aby móc zastosować wzór (29), należy obliczyć $\lim\limits_{t=+0} \dfrac{F'(t)}{G'(t)}$. Otóż dla $t \neq 0$ mamy

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df(1/t)}{dt} = \frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Podobnie

$$G'(t) = -\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right).$$

A zatem

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t=+0}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t=+0}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{=+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x=\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prócz wyrażeń nieoznaczonych postaci $\frac{0}{0}$ rozważamy również nieoznaczoności postaci $\frac{\infty}{\infty}$, rozumiejąc przez to

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{gdzie} \quad \lim_{x=a} f(x) = \infty = \lim_{x=a} g(x).$$

Obliczanie nieoznaczoności tej postaci można niekiedy sprowadzić do postaci $\frac{0}{0}$. Mianowicie przyjmując

$$F(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{i} \quad G(x) = \frac{1}{g(x)},$$

mamy

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x=a}\frac{G(x)}{F(x)},$$

a ta ostatnia nieoznaczoność jest postaci $\frac{0}{0}$.

Podobnie, jeśli

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

to wyrażenie nieoznaczone $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ postaci $0\cdot\infty$ sprowadza się do postaci $\frac{0}{0}$, bowiem

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{G(x)}.$$

Jeżeli

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x),$$

to nieoznaczoność $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)$ postaci $\infty-\infty$ sprowadzamy również do postaci $\frac{0}{0}$, przyjmując

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to a}\frac{G(x)-F(x)}{F(x)G(x)}.$$

Pozostają jeszcze do rozpatrzenia nieoznaczoności 0^0, ∞^0 i 1^∞. Sprowadzają się one do wyżej rozważanych na podstawie równości

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\log f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)}$$

PRZYKŁAD 3. $\lim\limits_{x\to+0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}\log\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\cos x} = 1,$

bowiem

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log\cos x}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to+0}\frac{-\operatorname{tg} x}{1} = 0.$$

PRZYKŁAD 4. Znaleźć pochodną prawostronną $f'_+(0)$ funkcji f określonej jak następuje: $f(x) = x^x$, gdy $x>0$, $f(0) = 1$.

Mamy

$$f'_+(0) = \lim_{x\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to+0}\frac{h^h-1}{h}.$$

Jest to nieoznaczoność postaci $\frac{0}{0}$, bowiem $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$ (por. przykład, § 5.3). Stosując wzór (29) i biorąc pod uwagę, że

$$\frac{d}{dx}(x^x-1) = x^x(\log x+1)$$

(por. tw. 3, § 7.6) otrzymujemy

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{x^x-1} = \lim_{x\to+0}\frac{1}{x^x(\log x+1)} = -0, \quad \text{skąd} \quad f'_+(0) = -\infty.$$

Przykład 5. Wyrażenie $\lim\limits_{x=+0}(x\log x)$ jest nieoznaczonością postaci $0\cdot\infty$. Dowód, że granica ta jest równa 0 może być przeprowadzony bezpośrednio, bez stosowania rachunku różniczkowego (por. przykład 4, § 4.6).

7.9. Pochodna granicy.

Twierdzenie. *Jeżeli w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ spełnione są równości*

$$\lim_{x=\infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{oraz} \quad \lim_{x=\infty} f_n'(x) = g(x), \tag{35}$$

przy czym funkcje f_n' są ciągłe i zbieżne jednostajnie do g, to

$$f'(x) = g(x), \quad \textit{czyli} \quad \frac{d}{dx}\lim_{x=\infty} f_n(x) = \lim_{x=\infty}\frac{df_n(x)}{dx}. \tag{36}$$

Niech c będzie danym punktem, należącym do przedziału ab. Oszacujmy różnicę

$$\frac{f_n(c+h)-f_n(c)}{h} - g(c) = f_n'(c+\theta h) - g(c). \tag{37}$$

Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Ponieważ ciąg $\{f_n'\}$ jest jednostajnie zbieżny do g, więc istnieje takie k, że dla $n > k$ i dla każdego x z przedziału ab mamy

$$|f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon. \tag{38}$$

Ponieważ zaś funkcja g jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła (por. tw. 1, § 6.1), istnieje więc takie $\delta > 0$, że nierówność $|x-c| < \delta$ pociąga za sobą

$$|g(x) - g(c)| < \varepsilon. \tag{39}$$

Zakładając, że $n > k$ i $|h| < \delta$, otrzymujemy więc następujące oszacowanie:

$$|f_n'(c+\theta h) - g(c)| \leqslant |f_n'(c+\theta h) - g(c+\theta h)| + |g(c+\theta h) - g(c)| < 2\varepsilon,$$

a na mocy (37)

$$\left|\frac{f_n(c+h)-f_n(c)}{h} - g(c)\right| < 2\varepsilon.$$

Ponieważ

$$\lim_{n=\infty} f_n(c+h) = f(c+h) \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} f_n(c) = f(c),$$

mamy więc

$$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - g(c)\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

o ile tylko $|h| < \delta$. Przechodząc do granicy dla h dążącego do 0, otrzymujemy stąd równość (36).

Uwaga 1. Zbieżność ciągu funkcji nawet jednostajna nie pociąga za sobą zbieżności ciągu pochodnych. Świadczy o tym przykład następujący:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx.$$

Uwaga 2. Twierdzenie pozostaje w mocy, jeśli zamiast zakładać, że pierwsza z równości (35) spełniona jest w całym przedziale ab, założyć jedynie, że spełniona jest w danym punkcie c. Jeśli bowiem ciąg funkcji jest zbieżny w punkcie c, a ciąg pochodnych jest zbieżny jednostajnie w przedziale ab, to ciąg funkcji jest zbieżny w całym przedziale ab.

Istotnie, na mocy naszych założeń istnieje dla danego $\varepsilon > 0$ taka liczba k, że dla $n > k$ spełnione są nierówności

(40) $$|f_n(c)-f_k(c)| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |f_n'(x)-f_k'(x)| < \varepsilon$$

dla $a \leqslant x \leqslant b$.

Przyjmijmy

$$F_n(x) = f_n(x)-f_k(x) \quad \text{oraz} \quad x = c+h.$$

Mamy więc

$$F_n(x) = F_n(c)+hF_n'(c+\theta h) = f_n(c)-f_k(c)+h\big(f_n'(c+\theta h)-f_k'(c+\theta h)\big).$$

Stąd na mocy (40):

$$|F_n(x)| < \varepsilon+(b-a)\varepsilon = \varepsilon\big(1+(b-a)\big).$$

A zatem ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny.

7.10. Pochodna szeregu potęgowego. Udowodnimy, że

(41) $$\frac{d}{dx}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$$

dla każdego x leżącego wewnątrz przedziału zbieżności szeregu

(42) $$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

przy tym szeregi (42) *i*

(43) $$g(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$$

mają ten sam promień zbieżności.

Udowodnimy najpierw drugą część twierdzenia. Niech więc r będzie promieniem zbieżności szeregu (42) i niech $0 < c < r$. Udowodnimy, że szereg $g(c)$ jest zbieżny. Niech $c < C < r$. Porównajmy wyrazy szeregu

(44) $$|a_1|+2|a_2|c+\ldots+n|a_n|c^{n-1}+\ldots$$

z odpowiednimi wyrazami szeregu zbieżnego (por. tw. 1, § 6.3):

(45) $$|a_1|C+|a_2|C^2+\ldots+|a_n|C^n+\ldots$$

Ponieważ $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (por. przykład 8, § 3.5), zaś $\dfrac{C}{c}>1$, przeto dla dużych n:

$$\sqrt[n]{n}<\frac{C}{c},$$

a stąd

$$n|a_n|c^{n-1}=\frac{|a_n|}{c}(\sqrt[n]{n}c)^n<\frac{|a_n|}{c}\left(\frac{C}{c}\cdot c\right)^n=\frac{1}{c}|a_n|C^n.$$

Wnosimy stąd, że szereg (44) jest zbieżny, a zatem zbieżny jest również (bezwzględnie) szereg $g(c)$.

Odwrotnie, jeśli szereg (43) jest zbieżny bezwzględnie, to również szereg (42) jest zbieżny. Bowiem

$$|a_nx^n|=|x||a_nx^{n-1}|\leqslant|x||na_nx^{n-1}|.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że każdy punkt leżący wewnątrz przedziału zbieżności szeregu (42) należy do przedziału zbieżności szeregu (43) i odwrotnie: każdy punkt leżący wewnątrz przedziału zbieżności szeregu (43) należy do przedziału zbieżności szeregu (42). A zatem oba te przedziały zbieżności się pokrywają.

Przejdźmy teraz do dowodu wzoru (41). Niech x będzie punktem wewnętrznym przedziału zbieżności szeregu (42), a zatem i szeregu (43). Niech ab będzie jakimś przedziałem domkniętym, otaczającym ten punkt i również położonym wewnątrz przedziału zbieżności. Na mocy twierdzenia 1 z § 6.3 szereg (43) jest w przedziale ab jednostajnie zbieżny. Oznacza to, że jeśli przyjąć

$$f_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

to funkcje f_n' tworzą ciąg jednostajnie zbieżny w przedziale ab do funkcji g. Stosując twierdzenie z § 7.9, otrzymujemy wzór (41).

Jak widać, wzór (41) orzeka, że *szereg potęgowy różniczkuje się — podobnie jak wielomian — wyraz po wyrazie.*

Ogólniej: jeżeli różniczkując wyraz po wyrazie szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ uzyskujemy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$ jednostajnie zbieżny i jeśli przy tym funkcje $u_n'(x)$ są ciągłe, to

(46) $$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x)$$

PRZYKŁAD. Różniczkując szereg

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

otrzymujemy dla $|x|<1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

7.11. Rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\log(1+x)$ i $\operatorname{arctg} x$. Weźmy pod uwagę znany nam wzór

$$\frac{d\log(1+x)}{dx}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \quad (|x|<1). \tag{47}$$

Szereg występujący w tym wzorze jest, jak widać natychmiast, pochodną szeregu

$$S(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

A zatem funkcje $\log(1+x)$ i $S(x)$ mają tę samą pochodną; różnią się więc o stałą (por. tw. 3, § 7.5). Przyjmijmy

$$\log(1+x)=S(x)+C.$$

Stałą C można obliczyć, podstawiając $x=0$; otrzymujemy $\log(1+0)=$ $=0=S(0)$. A zatem

$$C=\log(1+0)-S(0)=0.$$

Dowiedliśmy w ten sposób, że funkcje $\log(1+x)$ i $S(x)$ są identyczne w przedziale $-1<x<1$. Inaczej mówiąc:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad (|x|<1). \tag{48}$$

Podobnie ze wzoru

$$\frac{d\operatorname{arctg}x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots \quad (|x|<1)$$

wnosimy, że

$$\operatorname{arctg}x=C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

Podstawiając $x=0$ i biorąc pod uwagę, że $\operatorname{arctg}0=0$, otrzymujemy $C=0$. W rezultacie,

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \quad (|x|<1). \tag{49}$$

Udowodniliśmy, że wzór (48) obowiązuje dla $|x| < 1$. Wykażemy, że obowiązuje on również dla $x = 1$. Istotnie, dla $x = 1$ szereg występujący po prawej stronie tego wzoru, czyli szereg $S(1) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ jest zbieżny, a zatem na mocy twierdzenia Abela (por. tw. 3, § 6.3) funkcja $S(x)$ jest lewostronnie ciągła w punkcie 1. Stąd

$$S(1) = \lim_{x=1-0} S(x) = \lim_{x=1-0} \log(1+x) = \log 2,$$

ponieważ funkcja $\log(1+x)$ jest ciągła w punkcie 1. W rezultacie,

(50) $$\log 2 = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\ldots$$

Podobnie ze wzoru (49) wprowadzimy *wzór Leibniza*:

(51) $$\tfrac{1}{4}\pi = 1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\ldots$$

Oznaczając prawą stronę równości (49) przez $T(x)$, mamy

$$T(1) = \lim_{x=1-0} T(x) = \lim_{x=1-0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \tfrac{1}{4}\pi,$$

skąd wzór (51).

Uwaga 1. W praktyce wzór Leibniza mało się nadaje do obliczania liczby π; np. aby obliczyć $\frac{1}{4}\pi$ z dokładnością do trzech znaków dziesiętnych, należałoby wziąć sumę pierwszych 500 składników rozwinięcia Leibniza. Znacznie dogodniejszy jest wzór następujący.

Niech $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, tj. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Ponieważ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

oraz $1 = \operatorname{arctg}(\frac{1}{4}\pi)$, więc

$$\tfrac{1}{4}\pi = \alpha+\beta = \operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}.$$

Stąd na mocy wzoru (49) otrzymujemy

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 32}-\ldots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 27}+\frac{1}{5\cdot 243}-\ldots$$

Znane są inne wzory, dające jeszcze szybsze sposoby obliczania π.

Uwaga 2. Wzór (48) prowadzi do następującej nierówności:

(52) $$\frac{1}{x}\log(1+x) < 1 \quad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1.$$

Mamy bowiem

(53) $$\frac{1}{x}\log(1+x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\pm\frac{x^n}{n+1}\mp\ldots$$

Dla $0 < x \leqslant 1$ jest to szereg naprzemienny, spełniający warunki

$$1 > \frac{x}{2} > \frac{x^2}{3} > \dots \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n} = 0,$$

a zatem w myśl twierdzenia 1 z § 3.3 suma tego szeregu jest mniejsza od pierwszego jego składnika, tj. zachodzi nierówność (52).

Podobnie dowodzimy, że

$$(54) \qquad \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\log(1+x) > 1 \quad \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1.$$

Dodając bowiem do szeregu (53) szereg (48) podzielony przez 2, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\log(1+x) = 1 + x^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) - x^3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \dots \pm x^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n}\right) \mp \dots$$

Po odrzuceniu pierwszego składnika, otrzymujemy — jak łatwo sprawdzić — szereg naprzemienny, spełniający założenia twierdzenia 1 z § 3.3. Wnosimy stąd, że suma tego szeregu jest dodatnia. A zatem zachodzi wzór (54).

7.12*. Asymptoty. Za pomocą rachunku różniczkowego wyznaczyć można asymptoty danej krzywej $y = f(x)$. Mianowicie prostą $Y = aX + b$ nazywamy *asymptotą* krzywej $y = f(x)$, jeśli

$$a = \lim_{x=\infty} f'(x) \qquad \text{oraz} \qquad b = \lim_{x=\infty}\big(f(x) - ax\big).$$

Jak widać, kierunek asymptoty jest granicznym kierunkiem, do którego zmierza kierunek stycznej do krzywej w punkcie $(x, f(x))$, gdy x dąży do ∞; przy tym odległość tego punktu od asymptoty zmierza do 0. Odległość ta bowiem jest równa $|(f(x) - ax - b)\cos\alpha|$, gdzie α jest kątem utworzonym przez asymptotę z osią X.

Podobnie rozważamy asymptoty dla x dążącego do $-\infty$.

Wreszcie prostą $X = c$ (równoległą do osi Y) nazywamy asymptotą krzywej $y = f(x)$, $x < c$, jeśli

$$\lim_{x=c-0} f'(x) = \pm\infty = \lim_{x=c-0} f(x).$$

Podobnie określamy asymptoty dla krzywej $y = f(x)$, $x > c$.

Przykłady. Dla hiperboli $y = 1/x$ asymptotami są, jak łatwo sprawdzić, osie X i Y.

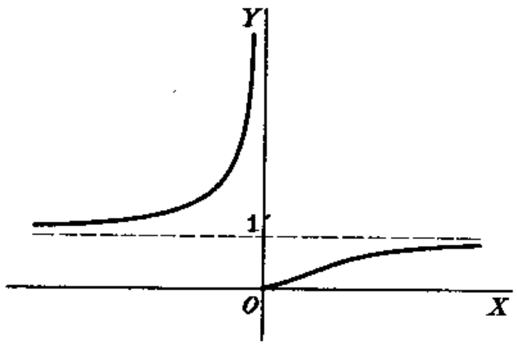
Aby znaleźć asymptoty krzywej $y = e^{-1/x}$ (patrz rys. 20), obliczamy

$$y' = \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

Stąd

$$\lim_{x=\infty} y = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x=\infty} y' = 0.$$

A zatem $a = 0$ i $b = 1$. Prosta $Y = 1$ jest więc asymptotą. Drugą asymptotą jest oś Y, bowiem $\lim_{x=-0} y = \infty$ oraz $\lim_{x=-0} y' = \infty$.



Rys. 20

7.13*. Pojęcie różniczki. Pojęciu różniczki można nadać ścisłą treść matematyczną w sposób następujący. Przez *różniczkę* funkcji $y = f(x)$ w punkcie x ze względu na przyrost h rozumiemy iloczyn $f'(x)h$. Piszemy

(55) $$df(x) = f'(x)h, \quad \text{lub krócej:} \quad dy = f'(x)h.$$

Symbolika $df(x)$ lub dy, dogodna w zastosowaniach ze względu na swą prostotę, nie uwydatnia zależności różniczki od zmiennej x, względem której się różniczkuje, ani zależności od przyrostu h. Ażeby tym wymaganiom uczynić zadość, należałoby pisać np. $d_x(y,h)$; przy tym jeśli chcemy zaznaczyć, że różniczka rozpatrywana jest w punkcie x_0, należałoby pisać $[d_x(f(x), h)]_{x=x_0}$, podobnie jak dla oznaczenia pochodnej w punkcie x_0.

W myśl wzoru (55) $dx = h$, bo podstawiając $f(x) = x$, mamy $f'(x) = 1$. Możemy zatem podstawić we wzorze (55): $h = dx$. Otrzymujemy $dy = f'(x)dx$. Dzieląc obie strony tej równości przez dx, mamy więc

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

gdzie po prawej stronie występuje iloraz dwóch różniczek (co uważać można za uzasadnienie symboliki Leibniza dla pochodnych). Ściślej mówiąc, mamy

$$f'(x) = \frac{d_x(y, h)}{d_x(x, h)} \quad \text{dla każdego} \quad h \neq 0.$$

Wzory rachunku różniczkowego można notować w symbolice różniczkowej, jak widać na następujących przykładach:

$$de^x = e^x dx, \qquad d\sin x = \cos x dx, \qquad dc = 0.$$

Wzór twierdzenia 4 z § 7.2 na pochodną sumy prowadzi do analogicznego wzoru na różniczkę sumy:

$$d(y+z) = dy+dz. \tag{56}$$

Istotnie, niech $y = f(x)$, $z = g(x)$. Mamy

$$d(y+z) = (y+z)'h = y'h+z'h = dy+dz.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$d(yz) = ydz+zdy. \tag{57}$$

Podamy jeszcze wzór na różniczkę funkcji superponowanych.

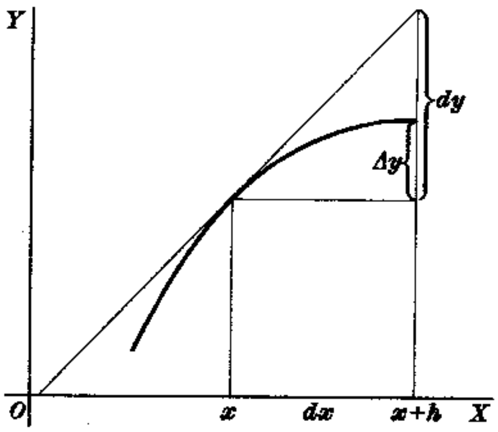
Niech $y = f(x)$ i $z = g(y)$. Wówczas

$$d_x z = g'(y)d_x y, \tag{58}$$

ponieważ

$$d_x z = \frac{dgf(x)}{dx}dx = g'(y)f'(x)dx = g'(y)d_x y$$

na mocy (55).



Rys. 21

Zauważmy, że na mocy (55) mamy też: $d_y z = g'(y)d_y y$. Zestawiając tę ostatnią równość z równością (58), widzimy, że jeśli z jest funkcją zmiennej y, to wzór na różniczkę z formalnie pozostanie bez zmiany, gdy y przedstawić jako funkcję nowej zmiennej x (pomijając oczywiście wskaźnik przy d, wskazujący względem jakiej zmiennej należy różniczkować).

Interpretacja geometryczna różniczki widoczna jest natychmiast z rysunku 21.

Zachodzi następujące

TWIERDZENIE. *Różnica między przyrostem funkcji $\Delta y = f(x+h)-f(x)$ a różniczką dy, podzielona przez różniczkę dx, dąży do 0 wraz z tą różniczką, tj.*

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\Delta y - dy}{dx} = 0. \tag{59}$$

Mamy bowiem

$$\frac{\Delta y - dy}{dx} = \frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x),$$

a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

Twierdzenie powyższe pozwala często w praktyce (np. w zastosowaniach fizycznych) zastępować różniczkę dy przez przyrost Δy.

Zadania

1. Zróżniczkować następujące funkcje:

1) $\dfrac{x^2+2x+4}{x^4-1}$, 2) $\sqrt{2x-x^2}$,

3) $\dfrac{x}{\sqrt{c+x^2}}$, 4) $\sec x$,

5) $\operatorname{cosec} x$, 6) $\operatorname{ctg} x$,

7) $\operatorname{arcsec} x$, 8) $\operatorname{arccosec} x$,

9) $\operatorname{arcctg} x$, 10) $\log \sin x$,

11) $\log \operatorname{tg} x$, 12) $\arccos(1-x)$,

13) $\operatorname{arctg}\dfrac{5x}{1-x^2}$, 14) $\log \sinh x$,

15) $\operatorname{artgh}\sqrt[3]{x}$.

2. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna, to jej pochodna f' posiada własność Darboux (tj. przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie).

Wskazówka. Udowodnić najpierw, że jeśli $f'(a) < 0 < f'(b)$, to istnieje w przedziale ab taki punkt c, że $f'(c) = 0$. Ogólny wypadek, gdy $f'(a) < A < f'(b)$, sprowadzić do poprzedniego, rozważając funkcję $f(x) - Ax$.

3. Dany jest szereg

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right).$$

Znaleźć $f'(x)$ oraz sumę szeregu pochodnych. Wyniki uzyskane zestawić z twierdzeniem z § 7.9.

4. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Wykazać na przykładzie, że nie zachodzi zależność odwrotna: powyższa granica (czyli tzw. pochodna uogólniona) może istnieć, pomimo że funkcja nie jest w punkcie x różniczkowalna.

5. Podać przykład funkcji, która w punkcie nieciągłości posiada pochodną uogólnioną.

6. Podać przykład funkcji parzystej (tj. takiej, że $f(x) = f(-x)$), dla której $f'(0) = 0$, pomimo że w punkcie 0 funkcja nie posiada ekstremum (nawet niewłaściwego).

7. Udowodnić, że jeśli funkcja ciągła posiada w punktach a i b maksimum, to posiada też minimum w jakimś punkcie pośrednim między a i b.

8. Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale $a < x < b$, a różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli istnieje granica prawostronna $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$, to istnieje też pochodna prawostronna funkcji f i są one równe: $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$.

9. Udowodnić, że wśród prostokątów o tym samym obwodzie kwadrat ma największe pole.

10. Udowodnić, że wśród trójkątów o stałym obwodzie i stałej podstawie trójkąt równoramienny ma największe pole.

11. Udowodnić, że wśród trójkątów o stałym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny.

12. Dowieść, że jeśli pochodna $f'(x)$ jest różnowartościowa, to dla każdego x_0 krzywa $y = f(x)$ leży po jednej stronie stycznej w tym punkcie.
Wywnioskować stąd, że $e^x > 1+x$ dla $x \neq 0$.

13. Dowieść, że $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\log(1+x) < 1$ dla $0 < x < 1$.

14. Dowieść, że $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ dla $x > -1$.

15. Rozwinąć w szereg potęgowy $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

16. Dane są dwa punkty P i Q położone na płaszczyźnie nad osią X. Znaleźć na osi X taki punkt R, aby suma odcinków PR i RQ była najkrótsza. Udowodnić, że kąty (ostre) utworzone przez te odcinki z osią X są sobie równe.
(Zinterpretować ten wynik na gruncie optyki: PRQ droga promienia, oś X zwierciadło).

17. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} ax}, \qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-0}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\operatorname{tg} x, \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}.$$

18. Udowodnić istnienie granicy (zwanej *stałą Eulera*):

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

Wskazówka. Wykazać, że rozważany ciąg jest malejący i ograniczony, opierając się na nierówności z zadania 14.

19. Udowodnić, że jeśli dwie funkcje różniczkowalne f i g spełniają dla każdego x nierówność $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$, to pomiędzy każdymi dwoma pierwiastkami równania $f(x) = 0$ znajduje się pierwiastek równania $g(x) = 0$.

Wskazówka. Rozważać funkcję pomocniczą $f(x)/g(x)$.

§ 8. Pochodne wyższych rzędów

8.1. Definicje i przykłady. *Drugą pochodną funkcji* f nazywamy pochodną pochodnej tej funkcji. Podobnie trzecia pochodna jest to pochodna drugiej pochodnej. Ogólnie, n-ta *pochodna* jest to pochodna $(n-1)$-ej pochodnej. Pochodne wyższych rzędów oznaczamy

$$f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}, \ldots$$

Mamy więc

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Na przykład niech $f(x) = x^3$. Mamy $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$ oraz $f^{(n)}(x) = 0$ dla $n > 3$. Ogólniej

$$(1) \qquad \frac{d^k(x^n)}{dx^k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} \quad \text{dla } k > n, \qquad \frac{d^n(x^n)}{dx^n} = n!$$

Jeśli a jest liczbą rzeczywistą (różną od liczb naturalnych), to dla dowolnego naturalnego k i dowolnego $x > -1$ mamy

$$(2) \qquad \frac{d^k}{dx^k}(1+x)^a = a(a-1)\ldots(a-k+1)(1+x)^{a-k}.$$

Funkcja e^x ma tę własność, że pochodne wszystkich rzędów są z nią identyczne.

Dla funkcji $f(x) = \sin x$ mamy

$$(3) \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Zachodzi tu równość $f^{(n)}(x) = f^{(n+4)}(x)$. Ta sama równość jest spełniona przez funkcję $f(x) = \cos x$.

Zauważmy przy tej okazji, że dogodnie jest rozważać pochodną rzędu 0 jako identyczną z samą funkcją: $f^{(0)}(x) = f(x)$. Podana powyżej równość obowiązuje również dla $n = 0$.

Wzór (1) pozwala łatwo obliczyć k-tą pochodną wielomianu n-tego stopnia: $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Podstawiając w $f^{(k)}(x)$ (dla $k = 0, 1, \ldots, n$) $x = 0$, znajdujemy

$$(4) \quad a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2}f''(0), \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

Stąd otrzymujemy wzór, który następnie uogólnimy,

(5) $$f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

Jako przykład na obliczanie pochodnych wyższych rzędów przytoczymy wzór na *drugą pochodną funkcji odwrotnej*.

Jak wiemy $\frac{dx}{dy} = 1:\frac{dy}{dx}$. Stąd

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(1:\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dy},$$

zatem

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}:\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

W zastosowaniach do fizyki mamy bardzo często do czynienia z drugą pochodną. W szczególności, *przyśpieszenie* jako pochodna prędkości względem czasu jest drugą pochodną drogi względem czasu d^2s/dt^2. Stąd siła równa jest $m\frac{d^2s}{dt^2}$, gdzie m oznacza masę.

8.2*. Różniczki wyższych rzędów. Drugą różniczkę funkcji $f(x)$ określamy jako różniczkę różniczki funkcji $f(x)$. Ściślej mówiąc, jako różniczkę ze względu na przyrost h różniczki funkcji f ze względu na przyrost h; zmienną, względem której się różniczkuje, jest x. Przyjmując $y = f(x)$ i oznaczając drugą różniczkę przez d^2y mamy więc

$$d^2y = d(dy) = d(y'h) = \frac{d}{dx}(y'h)h = y''h^2 = y''(dx)^2.$$

Widzimy zatem, że druga pochodna funkcji f jest ilorazem jej drugiej różniczki przez kwadrat różniczki dx (co uzasadnia znakowanie na drugą pochodną).

Ogólnie, n-tą różniczkę d^ny określamy jako n-tą iterację różniczki, tj. $d^ny = d(d^{n-1}y)$ (ze względu na ten sam przyrost h).

Mamy wówczas

(6) $$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Dowodzimy tego przez indukcję. Wzór (6) zachodzi dla $n = 1$ (i jak widzieliśmy, dla $n = 2$). Przyjmując ten wzór dla n, należy go udowodnić dla $n+1$. Otóż

$$d^{n+1}y = d(d^ny) = d\left(y^{(n)}(dx)^n\right) = \frac{d}{dx}\left(y^{(n)}(dx)^n\right)dx = y^{(n+1)}(dx)^{n+1}.$$

PRZYKŁAD. Pochodne wyższych rzędów funkcji odwrotnej (por. § 8.1) obliczyć można za pomocą różniczek wyższych rzędów jak następuje. Niech funkcja $x = g(y)$ będzie odwrotną względem $y = f(x)$. Różniczki $dy, d^2y, d^3y, \ldots$ rozumiane będą jako $d_yy, d_y^2y, d_y^3y, \ldots$ Oczywiście $d^2y = 0$, $d^3y = 0, \ldots$

Ponieważ $y'x' = 1$, przeto $dy = y'x'dy$. Różniczkując względem y, otrzymujemy

$$0 = d^2y = \left(\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}x' + \frac{dx'}{dy}y'\right)(dy)^2 = \left(y''(x')^2+y'x''\right)(dy)^2.$$

Analogicznie

$$0 = d^3y = \left(y'''(x')^3+3y''x'x''+y'x'''\right)(dy)^3.$$

Otrzymujemy w ten sposób równania, które pozwalają nam kolejno obliczać pochodne $x', x'', x''', \ldots$:

$$\begin{aligned} &y'x' = 1, \\ &y''(x')^2+y'x'' = 0, \\ &y'''(x')^3+3y''x'x''+y'x''' = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

8.3. Działania arytmetyczne. Niech $y=f(x)$, $z=g(x)$. Z łatwością sprawdzamy przez indukcję, że

$$(y+z)^{(n)} = y^{(n)}+z^{(n)} \tag{7}$$

oraz

$$(y-z)^{(n)} = y^{(n)}-z^{(n)}. \tag{8}$$

Dla n-tej pochodnej iloczynu mamy następujący *wzór Leibniza*:

$$(yz)^{(n)} = y^{(n)}z+\binom{n}{1}y^{(n-1)}z'+\binom{n}{2}y^{(n-2)}z''+\ldots+yz^{(n)} = \tag{9}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{(n-k)}z^{(k)}.$$

Wzór ten udowodnimy przez indukcję. Dla $n = 1$ jest to znany nam wzór na pochodną iloczynu. Załóżmy, że wzór ten zachodzi dla n i zróżniczkujmy go. Otrzymamy

$$(yz)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}y^{(n-k+1)}z^{(k)}+\binom{n}{k}y^{(n-k)}z^{(k+1)}\right] =$$

$$= y^{(n+1)}z+\sum_{k=1}^{n}\left\{y^{(n-k+1)}z^{(k)}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]\right\}+yz^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}y^{(n+1-k)}z^{(k)},$$

ponieważ

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

(por. wzór (4), § 6.13).

Przykład. Aby znaleźć n-tą pochodną funkcji xe^x, przyjmijmy $y=e^x$ i $z=x$. Jak widać, tylko pierwsze dwa wyrazy we wzorze (9) nie znikają. A zatem

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x)=e^x(x+n).$$

8.4. Wzór Taylora(¹). Wzór Lagrange'a (wzór (11), § 7.5) jest „pierwszym przybliżeniem" następującego *wzoru Taylora*:

Twierdzenie. *Załóżmy, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$. Niech $h=b-a$, wówczas $f(b)$ można przedstawić w postaci następującej*:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n, \tag{10}$$

przy czym

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)=\frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta' h), \tag{11}$$

gdzie θ i θ' oznaczają odpowiednio dobrane liczby, czyniące zadość nierównościom $0<\theta<1$ oraz $0<\theta'<1$.

Dowód. Na mocy równości (10) mamy

$$R_n=f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1!}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\ldots\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a). \tag{12}$$

Oznaczmy przez $g_n(x)$ funkcję pomocniczą, która powstaje z R_n, gdy zastąpimy a przez x:

$$g_n(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{1!}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\ldots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x). \tag{13}$$

Różniczkując, otrzymujemy

$$g_n'(x)=-f'(x)+\left[f'(x)-\frac{b-x}{1!}f''(x)\right]+\left[2\frac{b-x}{2!}f''(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)\right]+\ldots+$$
$$+\left[(n-1)\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right].$$

(¹) B. Taylor i C. Maclaurin cytowany dalej — matematycy angielscy pierwszej połowy XVIII wieku.

A zatem

$$g_n'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x).$$

Zarazem $g_n(b) = 0$, $g_n(a) = R_n$.

Stosując twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy

$$\frac{g_n(b)-g_n(a)}{b-a} = g_n'(a+\theta' h),$$

więc

$$\frac{-R_n}{h} = -\frac{(b-a-\theta' h)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta' h) = -\frac{h^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta' h),$$

skąd

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta' h).$$

Zgodnie z drugą częścią wzoru (11); jest to tzw. *postać Cauchy'ego reszty.*

Aby udowodnić pierwszą część wzoru (11), tj. *wzór Lagrange'a na resztę*, zastosujemy twierdzenie Cauchy'ego (tw. 4, § 7.5) do funkcji $g_n(x)$ oraz $u_n(x) = (b-x)^n$. Otrzymujemy

$$\frac{g_n(b)-g_n(a)}{u_n(b)-u_n(a)} = \frac{g_n'(a+\theta h)}{u_n'(a+\theta h)}.$$

Biorąc pod uwagę, że $u_n(b) = 0$, $u_n(a) = h^n$ i $u_n'(x) = -n(b-x)^{n-1}$, wnosimy stąd, że

$$\frac{-R_n}{-h^n} = -\frac{(b-a-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h)\frac{1}{-n(b-a-\theta h)^{n-1}},$$

skąd reszta R_n w postaci Lagrange'a.

W ten sposób twierdzenie Taylora jest w całości udowodnione.

Podstawiając $b = x$ i $a = 0$, otrzymujemy *wzór Maclaurina*

$$f(x) = f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n, \tag{14}$$

gdzie

$$R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta' x). \tag{15}$$

Wzór powyższy jest spełniony przy założeniu, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale domkniętym $0x$, względnie $x0$, w zależności od tego czy $x > 0$, czy $x < 0$ (jak widać z dowodu, założenie n-krotnej różniczkowalności można zastąpić przez założenie słabsze: mianowicie przez założenie, że $(n-1)$-sza pochodna jest ciągła w całym przedziale i że n-ta pochodna istnieje wewnątrz przedziału; są to założenia, które dla $n = 1$ czyniliśmy w twierdzeniu Rolle'a).

Przykład 1. Zastosujmy wzór Maclaurina, podstawiając we wzorze (14) $f(x) = e^x$ oraz $n = 2$.

Ponieważ

$$f'(x) = e^x = f''(x) \quad \text{oraz} \quad f(0) = 1 = f'(0),$$

a zatem

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}e^{\theta x}.$$

Wnosimy stąd, że dla każdego x zachodzi nierówność

$$e^x \geqslant 1+x, \tag{16}$$

ponieważ $x^2 \geqslant 0$ oraz $e^{\theta x} > 0$.

Nierówność (16) posiada przejrzystą treść geometryczną na wykresach funkcji $y = e^x$ i $y = 1+x$.

Przykład 2. Wzór Taylora pozwala zaostrzyć w następujący sposób wzór de l'Hospitala (por. (31), § 7.8): *jeśli funkcje f i g posiadają n-te pochodne ciągłe i jeśli*

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = 0, \quad \ldots, \quad g^{(n-1)}(a) = 0 \quad \textit{oraz} \quad g^{(n)}(a) \neq 0,$$

to

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \tag{17}$$

Istotnie, na mocy naszych założeń i wzoru (10) Taylora (w którym b zastępujemy przez x) otrzymujemy

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}\big(a+\theta(x-a)\big) \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}g^{(n)}\big(a+\theta'(x-a)\big).$$

A zatem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{g^{(n)}\big(a+\theta'(x-a)\big)}.$$

Przechodząc do granicy dla x dążącego do a i opierając się na ciągłości funkcji $f^{(n)}$ i $g^{(n)}$, otrzymujemy wzór (17).

Na przykład aby obliczyć

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x},$$

oznaczamy $f(x) = x-\sin x$ oraz $g(x) = x\sin x$. Mamy więc

$$f(0) = 0 = g(0), \quad f'(x) = 1-\cos x, \quad g'(x) = \sin x+x\cos x,$$

$$f'(0) = 0 = g'(0), \quad f''(x) = \sin x, \quad g''(x) = 2\cos x-x\sin x,$$

$$f''(0) = 0, \quad g''(0) = 2.$$

Na podstawie wzoru (17) (dla $n=2$) znajdujemy

(18) $$\lim_{x=0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Podobnie znajdujemy

(19) $$\lim_{x=0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=0.$$

Mianowicie

$$\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$$

i przyjmując $f(x)=x\cos x-\sin x$ oraz $g(x)=x\sin x$ otrzymujemy, przez rachunek zupełnie podobny do poprzedniego, żądany wzór.

PRZYKŁAD 3. Stosując wzór Maclaurina do funkcji $f(x)=\log(1+x)$ i biorąc pod uwagę, że

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad f(0)=0,\quad f'(0)=1,$$

otrzymujemy dla $x>-1$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}.$$

W szczególności dla $x=1/n$ mamy więc

$$0<\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2n^2\left(1+\frac{1}{n}\theta_n\right)^2}<\frac{1}{2n^2}.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (por. (14), § 3.4), więc zbieżny jest też szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right).$$

Sumę tego ostatniego szeregu oznaczamy przez γ. Mamy więc

$$\begin{aligned}\gamma&=\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\frac{k+1}{k}\right)=\\&=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\\&=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right).\end{aligned}$$

Ponieważ zaś

$$\lim_{n=\infty}\left(\log(n+1)-\log n\right) = \lim_{n=\infty}\log\frac{n+1}{n} = 0,$$

otrzymujemy w rezultacie (por. zad. 18, § 7)

$$\gamma = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right). \tag{20}$$

Liczbę γ nazywamy *stałą Eulera*. W przybliżeniu $\gamma = 0{,}5772\ldots$ [1].

8.5. Rozwinięcia w szeregi potęgowe. Ze wzoru (12) wnosimy natychmiast, że *jeśli* $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, *to*

$$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a). \tag{21}$$

W szczególności, *jeśli we wzorze Maclaurina mamy* $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, *to funkcja* $f(x)$ *daje się rozwinąć w szereg potęgowy*

$$f(x) = f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \tag{22}$$

Nim przejdziemy do zastosowań powyższego twierdzenia, zauważmy, że jeśli wszystkie pochodne $f^{(n)}$ są *wspólnie ograniczone* w przedziale $0x$, czyli jeśli istnieje taka liczba M, że nierówność $M > |f^{(n)}(\theta x)|$ zachodzi dla każdego n i dla każdego θ spełniającego warunek $0<\theta<1$, to $f(x)$ ma rozwinięcie (22) w szereg potęgowy (Maclaurina).

Mamy bowiem

$$|R_n| = \left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)\right| \leqslant \left|\frac{x^n}{n!}\right| M,$$

a ponieważ

$$\lim_{n=\infty}\frac{x^n}{n!} = 0, \quad \text{więc i} \quad \lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Uwaga 1. Zbieżność szeregu występującego po prawej stronie wzoru (22) nie wystarcza, aby równość (22) była spełniona, tj. aby funkcja $f(x)$ dała się rozwinąć w szereg potęgowy.

Na przykład funkcja $f(x) = e^{-1/x^2}$ (dla $x \neq 0$), $f(0) = 0$ nie daje się rozwinąć w szereg potęgowy, pomimo że jej szereg Maclaurina jest zbieżny; dla każdego n mamy tu $f^{(n)}(0) = 0$.

---

[1] Nie wiadomo do tej pory czy γ jest liczbą wymierną, czy niewymierną.

Leonhard Euler (1707-1783) — wielki matematyk szwajcarski, któremu matematyka zawdzięcza, prócz wielu nowych wyników, systematyczne opracowanie ówczesnej analizy matematycznej.

Uwaga 2. Wzór (4) daje się uogólnić na szeregi potęgowe. Mianowicie, jeśli $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, to $a_0 = f(0)$, $a_1 = \frac{1}{1!}f'(0)$, ogólnie

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0). \tag{23}$$

Inaczej mówiąc, *jeśli funkcja posiada rozwinięcie w szereg potęgowy, to posiada tylko jedno takie rozwinięcie, mianowicie rozwinięcie Maclaurina* (wzór (22)).

Aby to udowodnić, dowodzimy najpierw przez indukcję, że założenie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

pociąga za sobą

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Podstawiając w tym wzorze $x = 0$ otrzymujemy równość (23).

PRZYKŁAD 1.

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Aby ten wzór udowodnić, zauważmy, że przyjmując $f(x) = e^x$, mamy $f^{(n)}(x) = e^x$ oraz $f^{(n)}(0) = 1$. Ponadto, w przedziale $0x$ pochodne wszystkich rzędów są wspólnie ograniczone; jeśli bowiem $0 \leqslant x$, to $f^{(n)}(\theta x) \leqslant e^x$, jeśli $0 > x$, to $f^{(n)}(\theta x) < 1$.

W szczególności

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots$$

PRZYKŁAD 2.

$$\sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

Opierając się na wzorze (3) z § 8.1 wnosimy natychmiast, że pochodne wszystkich rzędów funkcji sinus są wspólnie ograniczone (przez liczbę 1) w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Ponadto, $f^{(n)}(0) = \sin 0 = 0$ dla $n = 0, 2, 4, \ldots$ oraz $f'(0) = 1$, $f'''(0) = -1$, $f^{(5)}(0) = 1, \ldots$

Podobnie dowodzimy, że

PRZYKŁAD 3.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$$

PRZYKŁAD 4. Wyprowadzimy obecnie *wzór na dwumian Newtona* dla dowolnych wykładników rzeczywistych (nie naturalnych) i dla $|x| < 1$:

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n.$$

Rozważymy oddzielnie wypadki, gdy x jest dodatnie i gdy x jest ujemne.

1° $x > 0$. Ponieważ

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

(por. (2), § 8.1), więc reszta w postaci Lagrange'a przedstawia się jak następuje:

$$R_n(x) = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n(1+\theta_n x)^{a-n}\ (^1).$$

Ponieważ (por. przykład 6, § 3.5)

$$\lim_{n=\infty}\frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}x^n = 0 \quad \text{dla} \quad |x| < 1,$$

więc aby dowieść, że $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x) = 0$, wystarczy wykazać, że przy danym x ciąg $(1+\theta_n x)^{a-n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, jest ograniczony. Otóż ze względu na nierówność $x > 0$ mamy $1 < 1+\theta_n x < 1+x$. A zatem

$$1 \leqslant (1+\theta_n x)^a \leqslant (1+x)^a, \quad \text{względnie} \quad (1+x)^a \leqslant (1+\theta_n x)^a \leqslant 1,$$

w zależności od tego czy $a \geqslant 0$, czy $a \leqslant 0$. Ponadto $(1+\theta_n x)^{-n} < 1$.

Rozważany ciąg jest więc ograniczony.

2° $x < 0$. Zapisując resztę w postaci Cauchy'ego, mamy

$$R_n(x) = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta_n')^{n-1}(1+\theta_n' x)^{a-n}.$$

Ponieważ, podobnie jak poprzednio,

$$\lim_{n=\infty}\frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} = 0,$$

należy więc dowieść, że ciąg $(1-\theta_n')^{n-1}(1+\theta_n' x)^{a-n}$ jest ograniczony, tj. że ciągi

$$\left(\frac{1-\theta_n'}{1+\theta_n' x}\right)^{n-1} \quad \text{i} \quad (1+\theta_n' x)^{a-1}$$

---

(1) Piszemy wskaźnik n przy θ dla uwidocznienia, że θ zależy od n.

są ograniczone. Przyjmijmy w tym celu $y = -x$. A zatem $y > 0$ oraz $\theta'_n > \theta'_n y$, skąd $1-\theta'_n < 1-\theta'_n y < 1$. A więc

$$\left(\frac{1-\theta'_n}{1-\theta'_n y}\right)^{n-1} < 1.$$

Z drugiej strony $1-y < 1-\theta'_n y < 1$, a zatem

$$(1-y)^{a-1} \leqslant (1-\theta'_n y)^{a-1} \leqslant 1, \quad \text{względnie} \quad 1 \leqslant (1-\theta'_n y)^{a-1} \leqslant (1-y)^{a-1},$$

w zależności od tego czy $a-1 \geqslant 0$, czy $a-1 \leqslant 0$.

Oba ciągi są więc ograniczone. Stąd $\lim\limits_{n=\infty} R_n(x) = 0$.

Na przykład, podstawiając $a = \frac{1}{2}$, otrzymujemy

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\ldots$$

Dla $a = -\frac{1}{2}$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$$

Stąd

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots$$

Powyższy wzór pozwala na zastosowanie w celu rozwinięcia funkcji $\arcsin x$ w szereg potęgowy tej samej metody, którą stosowaliśmy rozwijając funkcje $\log x$ i $\operatorname{arctg} x$. Mianowicie, szereg występujący w tym wzorze jest, jak widać, pochodną szeregu

$$S(x) = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$$

Ponieważ zaś

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{więc} \quad \arcsin x = S(x)+C.$$

Zarazem $\arcsin 0 = 0 = S(0)$, a zatem $C = 0$, tj. $\arcsin x = S(x)$. Otrzymaliśmy w ten sposób wzór następujący:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad |x| < 1.$$

Zauważmy, że podstawiając $x = \frac{1}{2}$, otrzymujemy ze względu na to, że $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots$$

8.6. Kryterium na ekstrema. W § 7.4 udowodniliśmy, że jeśli funkcja (różniczkowalna) posiada w punkcie x ekstremum, to $f'(x) = 0$ (por. tw. 2). Nie jest jednak odwrotnie: równość $f'(x)$ nie pociąga za sobą istnienia w punkcie x ekstremum; świadczy o tym przykład funkcji $f(x) = x^3$. Badanie pochodnych wyższych rzędów prowadzi do następującego dokładniejszego kryterium na występowanie ekstremum:

TWIERDZENIE. *Załóżmy, że*

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(c) = 0, \qquad \textit{natomiast} \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Wówczas jeśli n jest liczbą parzystą, to w punkcie c funkcja f ma ekstremum właściwe, mianowicie maksimum, jeśli $f^{(n)}(c) < 0$, minimum, jeśli $f^{(n)}(c) > 0$. Natomiast jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja nie posiada ekstremum w punkcie c. (O n-tej pochodnej zakładamy ciągłość w punkcie c).

Istotnie, na mocy wzoru Taylora mamy

$$(24) \qquad f(c+h) = f(c) + \frac{h}{1!}f'(c) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(c) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c+\theta h),$$

skąd, ze względu na założenia naszego twierdzenia,

$$(25) \qquad f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c+\theta h).$$

Załóżmy, że n jest liczbą parzystą. Niech przy tym $f^{(n)}(c) < 0$. Ze względu na ciągłość funkcji $f^{(n)}$ w punkcie c, istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność $|x-c| < \delta$ pociąga za sobą $f^{(n)}(x) < 0$. Jeśli więc $|h| < \delta$, to i $|\theta h| < \delta$, a zatem $f^{(n)}(c+\theta h) < 0$. Wnosimy stąd na mocy (25), że jeśli

$$0 < |h| < \delta, \qquad \text{to} \qquad f(c+h) - f(c) < 0$$

(dla n parzystych bowiem $h^n > 0$). Oznacza to, że funkcja f ma w punkcie c maksimum.

Analogicznie rozumując dowodzimy, że jeśli n jest liczbą parzystą i

$$f^{(n)}(c) > 0, \qquad \text{to} \qquad f(c+h) - f(c) > 0,$$

a zatem w punkcie c funkcja ma minimum.

Załóżmy obecnie, że n jest liczbą nieparzystą. Niech $f^{(n)}(c) < 0$ (w wypadku, gdy $f^{(n)}(c) > 0$, rozumowanie jest analogiczne). Dobieramy jak poprzednio $\delta > 0$ w taki sposób, aby dla $|h| < \delta$ było $f^{(n)}(c+\theta h) < 0$. Mamy wówczas dla $0 < h < \delta$ nierówność

$$f(c+h) - f(c) < 0, \qquad \text{czyli} \qquad f(c) > f(c+h),$$

a dla $-\delta < h < 0$ mamy nierówność

$$f(c+h) - f(c) > 0, \qquad \text{skąd} \qquad f(c) < f(c+h).$$

W punkcie c nie ma więc ani maksimum, ani minimum.

PRZYKŁAD. Funkcja $f(x) = x^n$ posiada minimum w punkcie 0, jeśli n jest liczbą parzystą. Jeśli n jest nieparzyste, w punkcie tym nie ma ekstremum.

Istotnie, pierwszą nie znikającą w punkcie 0 pochodną funkcji x^n jest pochodna n-ta (por. (1), § 8.1), przy tym $f^{(n)}(x) = n!$

Uwaga. Aczkolwiek poprzednie twierdzenie nie dla wszystkich funkcji (dowolną ilość razy różniczkowalnych) pozwala rozstrzygnąć czy w danym punkcie występuje ekstremum (np. dla rozpatrywanej w § 8.4 funkcji e^{-1/x^2}, której wszystkie pochodne w punkcie 0 znikają), to jednak dla funkcji posiadających rozwinięcie Taylora (wzór (21)) w otoczeniu danego punktu a pozwala ono zawsze odpowiedzieć na to pytanie. Ze wzoru (21) bowiem wynika, że jeśli funkcja f nie jest stała, to nie wszystkie jej pochodne znikają w punkcie a.

8.7. Interpretacja geometryczna drugiej pochodnej. Punkty przegięcia. Jak widzieliśmy w § 7.7 (tw. 3), jeśli $f'(c) > 0$, to funkcja w otoczeniu punktu c rośnie. Jeśli więc $f''(c) > 0$, to funkcja f' rośnie; a zatem przy założeniu, że $f'(c) > 0$, funkcja f rośnie coraz szybciej.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli $f''(c) > 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest dla pewnego otoczenia punktu c położona powyżej stycznej do tej krzywej w punkcie $(c, f(c))$ (jest więc wypukłością skierowana w dół).*

Analogicznie, *jeśli $f''(c) < 0$, to krzywa ta lokalnie leży poniżej stycznej (jest więc skierowana wypukłością ku górze).*

W obu wypadkach zakładamy ciągłość drugiej pochodnej.

Istotnie, oszacujmy różnicę między ilorazem różnicowym a pochodną

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c).$$

Na mocy wzoru Taylora mamy

$$f(c+h)-f(c)-hf'(c) = \tfrac{1}{2}h^2 f''(c+\theta h).$$

Jeśli więc założyć, że $f''(c) > 0$, to dla dostatecznie małych h mamy również

$$f''(c+\theta h) > 0, \quad \text{skąd} \quad f(c+h)-f(c)-hf'(c) > 0.$$

Interpretując iloraz różnicowy jako tangens kąta między sieczną a osią X (rys. 22), wnosimy stąd, że dla $h > 0$ tangens ten jest większy niż $f'(c)$, tj. niż tangens kąta między styczną a osią X. Oznacza to, że rozważany łuk krzywej leży nad styczną.

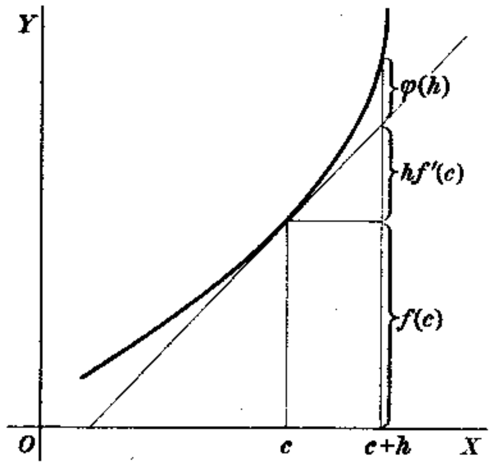
Dowód drugiej części twierdzenia jest zupełnie analogiczny.

PRZYKŁAD 1. Parabola $y = x^2$ leży w otoczeniu każdego punktu ponad styczną w tym punkcie. Druga pochodna jest równa 2.

Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ posiada w punkcie c ***punkt przegięcia***, jeżeli dla dostatecznie małych przyrostów $h(|h| < \delta)$ łuk krzywej dla przyrostów dodatnich leży po innej stronie stycznej do krzywej w punkcie $(c, f(c))$ niż dla przyrostów ujemnych. Inaczej mówiąc: jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $0 < h < \delta$ wyrażenie

$$\varphi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c)$$

jest dodatnie, a dla $0 > h > -\delta$ ujemne lub odwrotnie: dla $0 < h < \delta$ ujemne, a dla $0 > h > -\delta$ dodatnie.



Rys. 22

Przykład 2. Sinusoida $y = \sin x$ ma punkt przegięcia w punkcie 0. Istotnie, $\sin h - \sin 0 - h\cos 0 = \sin h - h$. Różnica ta jest ujemna dla $h > 0$, dodatnia dla $h < 0$.

Podobnie parabola kubiczna $y = x^3$ posiada punkt przegięcia w punkcie 0.

Z twierdzenia 1 wynika, że jeśli $f''(c) \neq 0$, to krzywa leży (lokalnie) po jednej stronie stycznej. Punkt c nie jest więc punktem przegięcia. Inaczej mówiąc:

Twierdzenie 2. *Jeśli punkt c jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(c) = 0$.*

Twierdzenie to nie daje się odwrócić: druga pochodna może znikać w punkcie c, mimo że punkt c nie jest punktem przegięcia (podobnie jak pierwsza pochodna może znikać, mimo że dany punkt nie stanowi ekstremum krzywej). Na przykład krzywa $y = x^4$ posiada minimum w punkcie 0, a więc punkt ten nie jest punktem przegięcia, mimo że druga pochodna $12x^2$ znika dla $x = 0$.

Aby uzyskać dokładniejsze kryterium, należy badać dalsze pochodne. Prowadzi to do następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 3. *Jeśli*

$$f''(c) = 0, \quad f'''(c) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(c) = 0, \qquad \textit{natomiast} \quad f^{(n)}(c) \neq 0,$$

to w wypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą, krzywa $y = f(x)$ posiada punkt przegięcia w punkcie c; jeśli zaś n jest parzyste, to c nie jest punktem przegięcia. (Zakładamy ciągłość n-tej pochodnej w c).

Istotnie, stosując wzór Taylora (24), otrzymujemy

$$\varphi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h).$$

Załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą. Niech $f^{(n)}(c) > 0$ (rozumowanie w wypadku, gdy $f^{(n)}(c) < 0$, jest analogiczne). Dla dostatecznie małych przyrostów h mamy więc

$$f^{(n)}(c+\theta h) > 0.$$

A zatem dla $h > 0$ mamy $\varphi(h) > 0$, a dla $h < 0$ mamy $\varphi(h) < 0$. Punkt c jest więc punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, to $h^n > 0$ niezależnie od znaku h, wskutek czego $\varphi(h)$ ma taki sam znak, co $f^{(n)}(c)$. Krzywa więc leży po jednej stronie stycznej do krzywej w punkcie $(c, f(c))$. Punkt ten nie stanowi więc punktu przegięcia.

Uwaga. Podobnie jak w wypadku ekstremów, pytanie czy punkt c jest punktem przegięcia, jest zawsze na mocy twierdzenia 3 rozstrzygalne dla funkcji posiadających rozwinięcie w szereg Taylora w otoczeniu punktu c. Zarazem punkty przegięcia krzywej $y = f(x)$ stanowią ekstrema krzywej $y = f'(x)$.

Zadania

1. Wyprowadzić wzór (*wzór Halphena*)

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{1/x}\right) = (-1)^n x^{-n-1} e^{1/x}.$$

2. Znaleźć n-tą pochodną funkcji:

$$\frac{\log x}{x}, \quad e^x \cos x.$$

3. Obliczyć

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x=0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$$

4. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcje: $\sinh x$ oraz $\cosh x$.

5. Podać wykresy funkcji x^x, $e^{1/x}$, $\log\sin x$, uwydatniając ich ekstrema, punkty przegięcia, asymptoty, punkty nieciągłości jednostronne lub obustronne (o ile istnieją).

6. Udowodnić, że jeśli funkcja n-krotnie różniczkowalna znika w $n+1$ różnych punktach danego przedziału, to istnieje w tym przedziale punkt, w którym n-ta pochodna znika.

7. Niech $f(x) = \frac{1}{x^n} e^{-1/x^2}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Udowodnić, że $f'(0) = 0$. Wyprowadzić stąd jako wniosek, że funkcja g określona przez warunki

$$g(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{dla} \quad x \neq 0 \quad \text{oraz} \quad g(0) = 0$$

posiada w punkcie 0 pochodne wszystkich rzędów równe 0 (por. uwaga 1, § 8.5).

8. Udowodnić, że

$$e^n < (2n+1)\frac{n^n}{n!}.$$

Wywnioskować stąd, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$.

ROZDZIAŁ IV

RACHUNEK CAŁKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 9. Całki nieoznaczone

9.1. Definicje. Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f, określonej w przedziale otwartym (skończonym lub nieskończonym), jeśli $F'(x) = f(x)$ dla każdego x.

Na przykład funkcja $\sin x$ jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$. Również każda funkcja postaci $\sin x + C$, gdzie C jest stałą, jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$.

Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$, to funkcję F nazywamy jej funkcją pierwotną, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $a < x < b$ oraz $F'_+(a) = f(a)$ i $F'_-(b) = f(b)$.

TWIERDZENIE 1. *Jeśli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f w przedziale ab (otwartym lub domkniętym), to te dwie funkcje różnią się między sobą o stałą.*

Istotnie, skoro $F'(x) = G'(x)$, to na mocy twierdzenia 3 z § 7.5, istnieje taka stała C, że $G(x) = F(x)+C$ dla każdego x.

Odwrotnie, funkcja, która powstaje przez dodanie stałej do funkcji pierwotnej funkcji f, jest funkcją pierwotną funkcji f. A zatem wyrażenie $F(x)+C$ jest ogólną postacią funkcji pierwotnej funkcji f. Wyrażenie to oznaczamy symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

(całka $f(x)$ po dx) i nazywamy je *całką nieoznaczoną* funkcji f. Mamy więc

(1) $$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \quad \text{gdzie} \quad F'(x) = f(x),$$

(2) $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x),$$

(3) $$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x)+C.$$

Znajdowanie całki nieoznaczonej funkcji f lub — co na jedno wychodzi — znajdowanie funkcji pierwotnej funkcji f nazywamy *całkowaniem* funkcji f. Całkowanie jest więc działaniem odwrotnym do różniczkowania.

Jak wynika z definicji całki nieoznaczonej, każdy wzór na pochodną jakiejś funkcji daje automatycznie wzór na całkę innej funkcji (mianowicie, funkcji pochodnej). Na przykład ze wzoru

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

otrzymujemy

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Na ogół jednak problem obliczenia całki funkcji ciągłej, która nie jest nam znana jako pochodna jakiejś funkcji, przedstawia większe trudności niż problem różniczkowania; jak widzieliśmy w § 7, różniczkowanie funkcji, które się otrzymuje przez superponowanie funkcji elementarnych, nie wyprowadza poza zakres tych funkcji, natomiast analogiczne twierdzenie dla całek nieoznaczonych byłoby fałszywe. Wiadomo jedynie, że każda funkcja ciągła posiada całkę nieoznaczoną (por. § 9.2); twierdzenie to nie daje jednak „praktycznego" sposobu obliczenia całki danej funkcji ciągłej.

Na podstawie znanych nam wzorów z rachunku różniczkowego otrzymujemy natychmiast następujące wzory:

$$\int 0\,dx = C, \tag{4}$$

$$\int a\,dx = ax + C, \tag{5}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \tag{6}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \tag{7}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \quad \text{(odnośnie zakresu } x\text{-ów, por. uwagę)}, \tag{10}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \tag{12}$$

(13) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

(14) $$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad \text{o ile} \quad a \neq -1 \text{ i } x > 0.$$

Uwaga. Jeżeli zakres x-ów, dla których spełniona jest równość $F'(x) = f(x)$, nie jest przedziałem (skończonym lub nieskończonym), to nie można twierdzić, że wyrażenie $F(x)+C$ obejmuje wszystkie funkcje pierwotne funkcji f w tym zakresie argumentów.

Na przykład $\log|x|+C$ obejmuje wszystkie funkcje pierwotne funkcji $1/x$ w każdym z dwóch zakresów $x < 0$ i $x > 0$ z osobna, lecz nie w całym zakresie x-ów rzeczywistych różnych od 0; bowiem funkcja $G(x)$, określona jako $\log|x|$ dla $x < 0$, a jako $\log|x|+1$ dla $x > 0$, jest funkcją pierwotną funkcji $1/x$ dla wszystkich $x \neq 0$, mimo że nie podpada pod wzór $\log|x|+C$.

Uzupełnimy obecnie twierdzenie 1, jak następuje:

TWIERDZENIE 2. *Niech dany będzie punkt x_0 wewnątrz przedziału ab i niech dana będzie dowolna liczba rzeczywista y_0. Jeśli funkcja f posiada funkcję pierwotną w przedziale ab, to posiada jedną i tylko jedną funkcję pierwotną F taką, że $F(x_0) = y_0$.*

Niech bowiem P będzie dowolną funkcją pierwotną funkcji f w przedziale ab. Przyjmijmy $F(x) = P(x)-P(x_0)+y_0$. Mamy więc $F'(x) = P'(x) = f(x)$ oraz $F(x_0) = y_0$. Funkcja F czyni zatem zadość warunkom twierdzenia.

Zarazem jest to jedyna funkcja, która czyni zadość tym warunkom, bowiem każda inna funkcja pierwotna funkcji f jest postaci $F(x)+C$, gdzie $C \neq 0$, skąd wynika $F(x_0)+C = y_0+C \neq y_0$.

Geometrycznie twierdzenie to oznacza, że przez każdy punkt płaszczyzny o odciętej należącej do przedziału ab przechodzi krzywa całkowa (tj. wykres funkcji pierwotnej). Ponieważ krzywe całkowe są do siebie równoległe, więc przez dany punkt płaszczyzny przechodzić może tylko jedna krzywa całkowa danej funkcji f.

9.2. Całka granicy. Całkowalność funkcji ciągłych. W § 7.9. udowodniliśmy, że jeśli dany jest ciąg funkcji F_n w przedziale ab, taki że pochodne F_n' są ciągłe i jednostajnie zbieżne w tym przedziale do funkcji g i jeśli ponadto dla jakiegoś punktu c należącego do przedziału ab ciąg $F_n(c)$ jest zbieżny, to ciąg $F_n(x)$ jest zbieżny dla każdego x należącego do tego przedziału, przy czym oznaczając $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$, mamy $F'(x) = g(x)$.

Wynika stąd lemat następujący:

LEMAT. *Jeżeli funkcje f_n są ciągłe, jednostajnie zbieżne w przedziale ab do funkcji f i posiadają funkcje pierwotne, to funkcja f również posiada funkcję pierwotną.*

Bowiem funkcje pierwotne $F_n(x)$ mogą być tak dobrane (stosownie do tw. 2, § 9.1), aby dla pewnego punktu c przedziału ab zachodziła równość $F_n(c) = 0$ przy każdej wartości n; wówczas

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} F_n(x) + C,$$

tj. całka granicy jest granicą całek.

Istotnie, wystarczy podstawić f_n na miejsce F'_n i f na miejsce g w powyższym sformułowaniu, aby otrzymać z niego nasz lemat.

TWIERDZENIE. *Każda funkcja ciągła w przedziale ab posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.*

Na mocy twierdzenia udowodnionego w § 6.4, każda funkcja ciągła w przedziale ab jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych. Stosownie więc do lematu, pozostaje do udowodnienia, że każda funkcja f przedziałami liniowa posiada funkcję pierwotną.

W myśl definicji funkcji przedziałami liniowej, istnieje taki układ $n+1$ punktów $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, gdzie $a_0 = a$, $a_n = b$, oraz takie dwa układy liczb $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i $d_1, d_2, \ldots, d_n$, że

$$f(x) = c_k x + d_k \quad \text{dla} \quad a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Przyjmijmy

$$F_k(x) = \tfrac{1}{2}c_k x^2 + d_k x + e_k \quad \text{dla} \quad a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k,$$

przy czym $e_1 = 0$ i dla $k \geqslant 1$

$$e_{k+1} = \tfrac{1}{2}c_k a_k^2 + d_k a_k + e_k - (\tfrac{1}{2}c_{k+1} a_k^2 + d_{k+1} a_k).$$

W ten sposób $F_k(a_k) = F_{k+1}(a_k)$, wskutek czego zespół funkcji $F_1, F_2, \ldots, F_n$ wyznacza jedną funkcję F odpowiednio równą każdej z funkcji tego zespołu w odpowiednim przedziale.

Różniczkując funkcję F_k, otrzymujemy natychmiast $F'(x) = f(x)$, tzn. że funkcja F jest pierwotną względem funkcji f.

9.3. Ogólne wzory na całkowanie. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Zachodzą wówczas następujące wzory:

TWIERDZENIE 1.

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Mamy bowiem

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = f(x) + g(x).$$

TWIERDZENIE 2.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

Bo

$$\frac{d}{dx}\left(a\int f(x)dx\right) = a\frac{d}{dx}\int f(x)dx = af(x).$$

PRZYKŁAD 1. Całka wielomianu

$$\int (a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)dx = C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

TWIERDZENIE 3 (WZÓR NA CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI):

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

(o ile funkcje f' i g' są ciągłe).

Krócej wzór ten zapisujemy, przyjmując $y=f(x)$ i $z=g(x)$, jak następuje:

$$\int y\frac{dz}{dx}dx = yz-\int z\frac{dy}{dx}dx.$$

Aby wzór ten udowodnić, zróżniczkujmy jego prawą stronę. Otrzymujemy: $yz'+y'z-zy' = yz'$. Jest to funkcja podcałkowa lewej strony wzoru. A zatem wzór jest udowodniony.

Szczególnym przypadkiem wzoru z twierdzenia 3 jest wzór następujący, który otrzymujemy podstawiając $z=x$.

TWIERDZENIE 3'.

$$\int y\,dx = yx-\int x\frac{dy}{dx}dx.$$

PRZYKŁAD 2.

$$\int \log x\,dx = x\log x-\int x\frac{1}{x}dx = x\log x-x+C.$$

TWIERDZENIE 4 (WZÓR NA CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE, czyli WZÓR NA ZAMIANĘ ZMIENNYCH):

$$\int g(f(x))\frac{df(x)}{dx}dx = \int g(y)dy,$$

przy czym po prawej stronie równości należy po obliczeniu całki podstawić $y=f(x)$.

Krócej wzór ten zapisujemy, przyjmując $y=f(x)$ i $z=g(y)$, jak następuje:

$$\int z\frac{dy}{dx}dx = \int z\,dy.$$

Niech $G(y) = \int g(y)dy$. Aby udowodnić wzór z twierdzenia 4, należy wykazać, że pochodna funkcji $G(f(x))$ równa się funkcji podcałkowej lewej strony tego wzoru. Otóż

$$\frac{dG(f(x))}{dx} = \left(\frac{dG(y)}{dy}\right)_{y=f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} = g(f(x))\frac{df(x)}{dx},$$

co było do wykazania.

Jak widać, możemy z punktu widzenia rachunkowego skracać przez różniczkę. Możemy też wzór z twierdzenia 3 zapisać w postaci

$$\int y\,dz = yz - \int z\,dy.$$

PRZYKŁAD 3.

$$\int g(ax)dx = \frac{1}{a}\int g(y)dy, \qquad \text{gdzie} \qquad y = ax.$$

Podstawiając bowiem w twierdzeniu 4: $f(x) = ax$, mamy

$$\frac{1}{a}\int g(ax)a\,dx = \frac{1}{a}\int g(y)dy.$$

PRZYKŁAD 4. Podobnie dowodzimy, że

$$\int f(x+a)dx = \int f(y)dy, \qquad \text{gdzie} \qquad y = x+a.$$

PRZYKŁAD 5(¹). Aby obliczyć całkę

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2},$$

podstawiamy $y = x^2$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2)}{dx}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{1+y} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\log(1+y) = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Ponieważ przy całkowaniu można — jak mówiliśmy — podstawiać różniczkę $df(x)$ zamiast $f'(x)dx$, tzn. w danym wypadku $d(x^2)$ zamiast $2x\,dx$, rachunek powyższy można przeprowadzić w sposób nieco krótszy:

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

PRZYKŁAD 6. Dla $n > 1$ mamy

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(1+x^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

(¹) Dla uproszczenia rachunków pomijamy stałą C w przykładzie 5 i dalszych przykładach.

PRZYKŁAD 7.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log|\cos x|.$$

Wzory z przykładów 5 i 7 wynikają też z łatwością z następującego wzoru ogólnego:

PRZYKŁAD 8.

$$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log|y|+C.$$

Przyjmując w przykładzie 6, że $y = 1+x^2$, wyprowadzamy go z łatwością z następującego ogólnego wzoru:

PRZYKŁAD 9.

$$\int y^a \frac{dy}{dx}dx = \int y^a dy = \frac{1}{a+1}y^{a+1}+C \qquad (a \neq -1).$$

Metoda całkowania stosowana w powyższych przykładach polega — jak widać — na znalezieniu takiej funkcji $y = f(x)$, ażeby dana całka przekształciła się w całkę względem zmiennej y (łatwiejszą do obliczenia). Pozwala to zastąpić obliczanie całki stojącej po lewej stronie wzoru z twierdzenia 4 przez obliczenie całki stojącej po jego prawej stronie. Niekiedy postępowanie odwrotne — od prawej strony ku lewej — jest bardziej celowe: mając obliczyć całkę $\int g(y)dy$, szukamy takiej funkcji ściśle monotonicznej $y = f(x)$, ażeby całka

$$\int g\big(f(x)\big)\frac{df(x)}{dx}\,dx,$$

dała się łatwo obliczyć. Oznaczając przez $x = h(y)$ funkcję odwrotną względem $y = f(x)$ oraz przez $F(x)$ i $G(y)$ odpowiednio całki występujące po lewej i prawej stronie wzoru z twierdzenia 4, mamy więc

$$F(x) = G\big(f(x)\big), \qquad \text{tj.} \qquad G(y) = F\big(h(y)\big),$$

inaczej mówiąc

$$\int g(y)\,dy = \int g\big(f(x)\big)\frac{df(x)}{dx}\,dx,$$

przy czym w całce stojącej po prawej stronie należy podstawić $x = h(y)$.

PRZYKŁAD 10. W następującej całce podstawmy $x = \sin t$, przy czym $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos t\frac{d\sin t}{dt}\,dt = \int \cos^2 t\,dt,$$

lecz

$$\cos^2 t = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t),$$

skąd

$$\int \cos^2 t\,dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t,$$

a ponieważ

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t},$$

więc otrzymujemy

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Uwaga. Prawidłowość całkowania sprawdzamy różniczkując funkcję stanowiącą wynik całkowania. Po zróżniczkowaniu powinniśmy otrzymać funkcję podcałkową.

Rekurencyjne metody obliczania całek. Metoda rekurencyjna obliczania całki $\int f_n(x)dx$ polega na obliczeniu całki dla $n = 1$ (lub $n = 0$) i na sprowadzeniu całki n-tej do całki $(n-1)$-ej (lub wcześniejszej).

PRZYKŁAD 11. Obliczyć całkę

$$I_n = \int e^{-x}x^n dx.$$

Otóż

$$I_0 = \int e^{-x}dx = -e^{-x}.$$

Zarazem całkując przez części, mamy (dla $n > 0$):

$$I_n = -\int x^n d(e^{-x}) = -x^n e^{-x} + \int e^{-x}\frac{dx^n}{dx}dx = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}.$$

W szczególności:

$$I_1 = -xe^{-x} + I_0, \quad I_2 = -x^2e^{-x} + 2I_1, \quad \ldots$$

Mnożąc kolejno I_0 przez $n!$, I_1 przez $\frac{n!}{1!}$, ..., I_{n-1} przez $\frac{n!}{(n-1)!}$ i dodając, otrzymujemy

$$\int e^{-x}x^n dx = -n!e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) + C.$$

PRZYKŁAD 12. Niech

$$I_n = \int\frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Otóż $I_1 = \operatorname{arctg} x$. Zarazem dla $n > 1$ mamy

$$I_n = \int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx = I_{n-1} - \int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^n}.$$

Ponieważ zaś

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = -2(n-1)\frac{x}{(1+x^2)^n},$$

przeto całkując przez części, otrzymujemy

$$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^n}=\frac{-1}{2n-2}\int x d\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}=\frac{-1}{2n-2}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}-I_{n-1}\right).$$

W rezultacie

$$I_n=I_{n-1}+\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}-\frac{1}{2n-2}I_{n-1}=$$

$$=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

Jest to żądany wzór rekurencyjny.

PRZYKŁAD 13. Niech $y=f(x)$, $z=g(x)$. Całkę $\int zy^{(n+1)}dx$ obliczamy stosując n razy całkowanie przez części:

$$\int zy^{(n+1)}dx=zy^{(n)}-\int z'y^{(n)}dx,$$

$$\int z'y^{(n)}dx=z'y^{(n-1)}-\int z''y^{(n-1)}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int z^{(n)}y'dx=z^{(n)}y-\int z^{(n+1)}y\,dx.$$

Stąd

$$\int zy^{(n+1)}dx=zy^{(n)}-zy^{(n-1)}+\ldots+(-1)^n z^{(n)}y+(-1)^{n+1}\int z^{(n+1)}y\,dx.$$

Wzór ten może być zastosowany na przykład do poprzednio obliczonej całki $\int e^{-x}x^n dx$, biorąc pod uwagę, że

$$e^{-x}=(-1)^k\frac{d^k(e^{-x})}{dx^k}.$$

9.4. Całkowanie funkcji wymiernych. Niech dana będzie funkcja wymierna

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to dwa wielomiany. Należy obliczyć całkę $\int f(x)dx$.

Możemy założyć, że stopień licznika jest n i ż s z y od stopnia mianownika. W przeciwnym bowiem razie dzielimy licznik przez mianownik i mamy wówczas do scałkowania sumę wielomianu (redukującego się ewentualnie do stałej) oraz ułamka, którego licznik i mianownik jest wielomianem, przy czym stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika. Z tych dwóch składników pierwszy (jako wielomian) potrafimy scałkować; zadanie nasze redukuje się więc do scałkowania drugiego składnika, tj. ilorazu postaci $P(x)/Q(x)$, gdzie wielomian $P(x)$ jest stopnia niższego niż wielomian $Q(x)$.

O funkcjach wymiernych tej postaci dowodzi się w algebrze twierdzenia następującego:

Nazwijmy *ułamkiem prostym* wyrażenie postaci

$$\frac{A}{(x-p)^k}, \quad \text{względnie} \quad \frac{Cx+D}{\left((x-q)^2+r^2\right)^k},$$

gdzie A i p, względnie C, D, q i r są liczbami rzeczywistymi.

Otóż funkcja wymierna $P(x)/Q(x)$ jest sumą ułamków prostych, których mianowniki są czynnikami wielomianu $Q(x)$.

Aby więc rozłożyć funkcję wymierną na ułamki proste, należy najpierw rozłożyć wielomian $Q(x)$ na czynniki pierwsze, a następnie wyznaczyć współczynniki występujące w licznikach ułamków prostych. Rozkład wielomianu $Q(x)$ na czynniki uzyskujemy na podstawie znanego z algebry twierdzenia orzekającego, że jeśli p jest pierwiastkiem (rzeczywistym lub zespolonym) równania $Q(x) = 0$, to $x-p$ jest czynnikiem wielomianu $Q(x)$, przy tym jeśli p jest pierwiastkiem n-krotnym, to $(x-p)^k$ jest czynnikiem tego wielomianu dla każdego $k \leqslant n$; wreszcie jeśli $u+iv$ jest pierwiastkiem zespolonym równania $Q(x) = 0$ o współczynnikach rzeczywistych, to i $u-iv$ jest jego pierwiastkiem (o tej samej krotności), a zatem wielomian $Q(x)$ ma jako czynnik iloczyn

$$(x-u-iv)(x-u+iv) = (x-u)^2+v^2.$$

Współczynniki występujące w licznikach ułamków prostych wyznaczamy zazwyczaj tzw. *metodą współczynników nieoznaczonych*, którą poznamy na przykładach.

Mianownik funkcji wymiernej

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}$$

posiada czynniki $(x-2)^2$, $x-2$ i $x-3$. A zatem nasza funkcja wymierna jest postaci

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Aby obliczyć współczynniki A, B i C, sprowadzamy prawą stronę powyższej równości do wspólnego mianownika. Otrzymamy

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{(B+C)x^2+(A-5B-4C)x-3A+6B+4C}{(x-2)^2(x-3)}.$$

Liczniki lewej i prawej strony powyższej tożsamości są sobie równe przy każdej wartości x. Wynika stąd, że

$$B+C = 0, \quad A-5B-4C = 1, \quad -3A+6B+4C = -1.$$

Równania te dają wartości $A = -1$, $B = -2$, $C = 2$.

W rezultacie

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-3}.$$

Zauważmy jeszcze, że współczynniki A, B i C można było w sposób nieco prostszy wyznaczyć jak następuje: po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymaliśmy równość następującą:

$$A(x-3)+B(x-2)(x-3)+C(x-2)^2 = x-1.$$

Podstawiając w tej tożsamości $x = 2$, otrzymujemy $A = -1$; podstawienie $x = 3$ daje $C = 2$. Stąd, podstawiając $x = 1$, wnosimy, że $B = -2$.

Inny przykład rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste:

$$\frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x+1}.$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika, otrzymujemy tożsamość

$$(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+1)(x+1)+E(x^2+1)^2 = x-1,$$

skąd z łatwością znajdujemy $A = 1$, $B = 0$, $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$, $E = -\frac{1}{2}$.

Twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste redukuje problemat całkowania funkcji wymiernych do całkowania ułamków prostych. Przekonamy się obecnie, *że ułamki proste dają się scałkować metodami już przez nas poznanymi.*

Istotnie, przez podstawienie $y = x-p$ otrzymujemy

$$\int \frac{A\,dx}{(x-p)^k} = A\int \frac{dy}{y^k} = \begin{cases} A\log y & \text{dla} \quad k = 1, \\ \dfrac{A}{1-k}\cdot\dfrac{1}{y^{k-1}} & \text{dla} \quad k > 1. \end{cases}$$

Obliczenie całki

$$\int \frac{(Cx+D)\,dx}{\left((x-q)^2+r^2\right)^k}$$

sprowadza się do obliczenia dwóch całek:

$$\int \frac{dx}{\left((x-q)^2+r^2\right)^k} \qquad \text{oraz} \qquad \int \frac{(x-q)\,dx}{\left((x-q)^2+r^2\right)^k}.$$

Pierwsza z tych całek przez podstawienie $y = x-q$ sprowadza się do całki $\int \frac{dy}{(y^2+r^2)^k}$, która z kolei przez podstawienie $z = y/r$ redukuje się do znanej nam całki (por. przykład 12, § 9.3): $\int \frac{dz}{(z^2+1)^k}$.

Drugą całkę znajdujemy na mocy wzorów z przykładów 8 i 9, § 9.3, podstawiając $y = (x-q)^2+r^2$; mianowicie

$$\int \frac{(x-q)\,dx}{\big((x-q)^2+r^2\big)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\big((x-q)^2+r^2\big) & \text{dla} \quad k = 1, \\ -\dfrac{1}{2(k-1)}\cdot\dfrac{1}{\big((x-q)^2+r^2\big)^{k-1}} & \text{dla} \quad k \neq 1. \end{cases}$$

W ten sposób całkowanie funkcji wymiernych jest zawsze wykonalne (oczywiście, jeśli są znane pierwiastki równania $Q(x) = 0$).

PRZYKŁAD 1. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$. Ponieważ

$$x^2+x+1 = x^2+x+\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4} = (x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4},$$

przeto podstawiając najpierw $y = x+\frac{1}{2}$, a następnie $z = 2y/\sqrt{3}$, otrzymujemy

$$I = \int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{4}{3}dy}{\frac{4}{3}y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} z =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

PRZYKŁAD 2.

$$I = \int \frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2}\,dx = \int\left(\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{x+1}\right)dx.$$

Sprowadzając prawą stronę tej równości do wspólnego mianownika, znajdujemy z łatwością $A = 3$, $B = 4$, $C = 2$, $D = -1$. Całkując otrzymujemy

$$I = -\frac{3}{x-1}+4\log|x-1|-\frac{2}{x+1}-\log|x+1| = \frac{5x+1}{1-x^2}+\log\frac{(x-1)^4}{|x+1|}.$$

Uwaga. Analizując metodę całkowania funkcji wymiernych konstatujemy, że całka funkcji wymiernej jest postaci

$$W(x)+A\log U(x)+B\operatorname{arctg} V(x),$$

gdzie $W(x)$, $U(x)$ i $V(x)$ są funkcjami wymiernymi, a A i B oznaczają stałe współczynniki.

9.5. Całkowanie niewymierności stopnia drugiego. Rozważać będziemy całkę postaci

$$I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Weźmy przede wszystkim pod uwagę wypadek, gdy $a = 0$. Możemy wówczas założyć, że $b \neq 0$, w przeciwnym bowiem wypadku funkcja podcałkowa redukuje się do stałej. Mamy więc do obliczenia całkę

$$I = \int \sqrt{bx+c}\,dx, \qquad b \neq 0.$$

Podstawiamy $t = bx+c$, zatem $x = \dfrac{t-c}{b}$, skąd $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{b}$. Całka przekształca się więc w całkę następującą:

$$I = \int \sqrt{t}\frac{dx}{dt}\,dt = \int \sqrt{t}\frac{1}{b}\,dt = \frac{2}{3b}t\sqrt{t} = \frac{2}{3b}(bx+c)\sqrt{bx+c}.$$

Załóżmy z kolei, że $a \neq 0$. Rozważamy dwa wypadki:

1° $b^2-4ac \geqslant 0$. Przy tym założeniu równanie $ax^2+bx+c = 0$ posiada, jak wiadomo, pierwiastki rzeczywiste i trójmian kwadratowy jest postaci

$$ax^2+bx+c = a(x-p)(x-q),$$

gdzie p i q są pierwiastkami powyższego równania. Mamy więc

$$I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int (x-p)\sqrt{a\frac{x-q}{x-p}}\,dx.$$

Podstawmy

$$a\frac{x-q}{x-p} = t^2, \qquad \text{skąd} \qquad x = \frac{aq-t^2p}{a-t^2}.$$

Otrzymujemy

$$I = \int t\frac{aq-ap}{a-t^2}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Całka ta jako całka funkcji wymiernej (dx/dt jest bowiem, jak widać, funkcją wymierną) daje się obliczyć metodami podanymi w § 9.4.

2° $b^2-4ac < 0$. Można w tym wypadku założyć, że $a > 0$, bo w przeciwnym razie trójmian postaci $a\big((x-\alpha)^2+\beta\big)$, stanowiący funkcję podpierwiastkową, byłby stale ujemny. Stosujemy następujące *pierwsze podstawienie Eulera*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t, \qquad \text{skąd} \qquad bx+c = 2xt\sqrt{a}+t^2$$

czyli

$$x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}.$$

Ponieważ $\sqrt{ax^2+bx+c}$ jak również dx/dt wyraża się jako funkcja wymierna zmiennej t, przeto całka nasza sprowadza się do całki funkcji wymiernej.

Powyższe podstawienie Eulera można stosować również w wypadku 1°, byleby było $a > 0$.

Jeśli $c > 0$, stosować można ***drugie podstawienie Eulera:***

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}, \quad \text{skąd} \quad ax+b = xt^2+2t\sqrt{c},$$

czyli

$$x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}.$$

Podobnie jak poprzednio, widzimy, że podstawienie to sprowadza całkę I do całki funkcji wymiernej względem zmiennej t.

W rezultacie dochodzimy do wniosku, że całka I da się obliczyć dla wszelkich stałych a, b i c. Z powyższych rozważań wynika też z łatwością, że jeśli $R(u, v)$ jest funkcją wymierną zmiennych u i v, to całka

$$\int R\left(\sqrt{ax^2+bx+c}, x\right) dx$$

sprowadza się do całkowania funkcji wymiernej (całkowanie jest więc wykonalne).

PRZYKŁAD 1. Niech

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} \quad \text{dla} \quad x^2 > -c.$$

Zastosujmy pierwsze podstawienie Eulera w nieco zmodyfikowanej postaci. Mianowicie podstawmy $\sqrt{x^2+c} = t-x$, skąd

$$x = \frac{t^2-c}{2t} \quad \text{oraz} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2+c}{2t^2}.$$

Stąd $t-x = \dfrac{t^2+c}{2t}$ oraz

$$I = \int \frac{2t}{t^2+c}\cdot\frac{t^2+c}{2t^2}\,dt = \int\frac{dt}{t} = \log|t|+C = \log\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C.$$

PRZYKŁAD 2. Niech

$$I = \int\sqrt{x^2+c}\,dx \quad \text{dla} \quad x^2 > -c.$$

Całkę tę można obliczyć za pomocą podstawienia Eulera. Oblicza się prościej tę całkę, sprowadzając ją do poprzedniej całki przez całkowanie przez części. Mianowicie

$$I = x\sqrt{x^2+c}-\int x\frac{d\sqrt{x^2+c}}{dx}\,dx = x\sqrt{x^2+c}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+c}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+c}-\int\frac{x^2+c-c}{\sqrt{x^2+c}}\,dx = x\sqrt{x^2+c}-I+c\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}.$$

Stąd

$$I = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+c}+\tfrac{1}{2}c\log\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C.$$

Zauważmy, że wzory na pochodne funkcji odwrotnych względem funkcji hiperbolicznych (22) i (23), § 7.6, pozwalają bezpośrednio napisać wzory na całki rozważane w przykładzie 1 dla $c = \pm 1$. Mianowicie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C = \log|x+\sqrt{x^2+1}|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \log|x+\sqrt{x^2-1}|+C \qquad \text{dla} \quad x > 1.$$

Uwaga. Jak widzieliśmy, całkowanie niewymierności stopnia drugiego jest zawsze wykonalne. Jeśli jednak pod znakiem pierwiastka zastąpić trójmian ax^2+bx+c przez wielomian trzeciego lub wyższego stopnia, to problem całkowalności jest na ogół (tzn. bez specjalnych założeń o współczynnikach) w obrębie funkcji elementarnych niewykonalny.

W szczególności całka

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

nie da się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Wyprowadza więc ona poza obręb funkcji elementarnych (podobnie jak całka $\int dx/x$ wyprowadza poza obręb funkcji wymiernych). Jest to tzw. *całka eliptyczna*.

Podobnie nie dadzą się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych (i również prowadzą do całek eliptycznych) całki

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \qquad \text{dla} \quad k < 1.$$

9.6. Całkowanie funkcji trygonometrycznych. Niech $R(u,v)$ oznacza funkcję wymierną dwóch zmiennych u i v. Metoda całkowania funkcji $R(\sin x, \cos x)$ polega na podstawieniu $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Z identyczności

$$\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x} = 1+\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x$$

wnosimy, że

$$\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Ponieważ zaś $\cos x = 2\cos^2\frac{1}{2}x - 1$, więc

$$\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Zarazem

$$\sin^2\tfrac{1}{2}x = 1-\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

skąd
$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = \frac{2t}{1+t^2}.$$
Wreszcie równość $x = 2\operatorname{arctg} t$ pociąga za sobą
$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Powyższe trzy wzory dają
$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt,$$
ostatnia zaś całka, jako całka funkcji wymiernej zmiennej t, daje się obliczyć metodami, które już poznaliśmy.

PRZYKŁAD 1. Niech
$$I = \int \frac{dx}{\cos x}.$$
Stosując podstawienie $t = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x$, otrzymujemy
$$I = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{2dt}{1-t^2} = \int\frac{dt}{1+t} + \int\frac{dt}{1-t} = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|,$$
a ponieważ
$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$
więc
$$\int\frac{dx}{\cos x} = \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Stąd
$$\int\frac{dx}{\sin x} = \log|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|,$$
bo $\sin x = \cos(x-\frac{1}{2}\pi)$, a zatem
$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{d(x-\frac{1}{2}\pi)}{\cos(x-\frac{1}{2}\pi)} = \log|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|.$$

Tę ostatnią całkę można też w prosty sposób wyprowadzić z całek (por. przykład 7, § 9.3):
$$\int\operatorname{tg}x\,dx = -\log|\cos x|, \qquad \int\operatorname{ctg}x\,dx = \log|\sin x|.$$

Mamy bowiem
$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin^2\frac{1}{2}x+\cos^2\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}\,dx =$$
$$= \int\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\,d\tfrac{1}{2}x + \int\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}x\,d\tfrac{1}{2}x =$$
$$= -\log|\cos\tfrac{1}{2}x| + \log|\sin\tfrac{1}{2}x| = \log|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|.$$

Znając całkę $\int \frac{dx}{\sin x}$, znajdujemy natychmiast całkę $\int \frac{dx}{\cos x}$, podstawiając $\cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$.

PRZYKŁAD 2. Do całek trygonometrycznych typu $R(\sin x, \cos x)$ sprowadzają się z łatwością niewymierności stopnia drugiego. Sprowadzają się bowiem do funkcji tego typu funkcje

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2+1}, \quad \sqrt{x^2-1}$$

przez podstawienia:

$$x = \sin t, \quad x = \operatorname{tg} t, \quad x = \sec t;$$

przy czym w każdym z trzech wypadków pochodna dx/dt jest też funkcją wymierną funkcji $\sin t$ i $\cos t$. Istotnie,

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t, \qquad \frac{d\sin t}{dt} = \cos t,$$

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1} = \sec t = \frac{1}{\cos t}, \qquad \frac{d\operatorname{tg} t}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{\sec^2 t-1} = \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \frac{d\sec t}{dt} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}.$$

Na przykład

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{dt}{\cos^3 t}, \qquad \text{gdzie} \quad x = \operatorname{tg} t.$$

Niekiedy dogodniej jest podstawić $x = \cos t$ zamiast $x = \sin t$ lub $x = \operatorname{ctg} t$ zamiast $x = \operatorname{tg} t$. Podstawmy na przykład, $x = \operatorname{ctg} t$ w całce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \sin t \frac{d\operatorname{ctg} t}{dt} dt = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\log|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t|.$$

Ponieważ zaś

$$\frac{1}{x} = \operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}t}, \qquad \text{więc} \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t = -x+\sqrt{x^2+1}.$$

Stąd znajdujemy poprzednio już obliczoną na innej drodze całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Podamy obecnie niektóre inne typy całek funkcji trygonometrycznych mających ważne znaczenie w zastosowaniach.

Obliczymy całkę

$$I_n = \int \sin^n x\,dx.$$

Podamy wzór rekurencyjny. Mamy

$$I_n = -\int \sin^{n-1}x\,d\cos x = -\sin^{n-1}x\cos x + \int \cos x \frac{d\sin^{n-1}x}{dx}\,dx =$$

$$= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx =$$

$$= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

bo $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$. Stąd żądany wzór

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad (\text{dla } n \geqslant 2).$$

Podobnie znajdujemy

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx \qquad (\text{dla } n \geqslant 2).$$

Całki

$$\int \sin mx \sin nx\,dx, \qquad \int \sin mx \cos nx\,dx, \qquad \int \cos mx \cos nx\,dx$$

obliczamy opierając się na znanych z trygonometrii wzorach

$$\sin mx \sin nx = \tfrac{1}{2}\big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big),$$

$$\sin mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\big),$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\big).$$

Znajdujemy z łatwością

$$\int \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n} - \dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right) & \text{dla} \quad m \neq \pm n, \\ \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2mx}{2m}\right) & \text{dla} \quad m = n, \end{cases}$$

$$\int \sin mx \cos nx\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\cos(m-n)x}{m-n}\right) & \text{dla} \quad m \neq \pm n, \\ -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos 2mx}{2m} & \text{dla} \quad m = n, \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n} + \dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}\right) & \text{dla} \quad m \neq \pm n, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 2mx}{2m} + x\right) & \text{dla} \quad m = n. \end{cases}$$

Aby obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}.$$

przedstawiamy mianownik funkcji podcałkowej w postaci $c\sin(x+\theta)$. Mianowicie, wartości na c i θ wyznaczamy z tożsamości

$$c\sin x\cos\theta + c\cos x\sin\theta = a\sin x + b\cos x,$$

zatem

$$a = c\cos\theta, \quad b = c\sin\theta, \qquad \text{czyli} \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(b/a).$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{c}\int \frac{d(x+\theta)}{\sin(x+\theta)} = \frac{1}{c}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|.$$

Uwaga. Podaliśmy w przykładzie 12, § 9.3, wzór rekurencyjny na całkę $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Całkę tę obliczyć można również opierając się na wzorze na całkę $\int \cos^m x\,dx$. Podstawiając bowiem $x = \operatorname{tg} t$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \cos^{2n} t \frac{d\operatorname{tg} t}{dt}\,dt = \int \cos^{2n-2} t\,dt.$$

Zadania

Znaleźć całki nieoznaczone następujących funkcji:

1. $e^{ax}\sin x$.
2. xe^x.
3. $x\sin x$.
4. $x^a\log x$.
5. $\operatorname{arctg} x$.
6. $x^a(\log x)^m$.
7. $\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
8. $\dfrac{1}{1+x^2+x^4}$.
9. $\dfrac{x^3-x+4}{(x^2-1)(x+2)}$.
10. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$.
11. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.
12. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
13. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c}}$ przez podstawienie $\sqrt{x^2+c} = x+t$ (por. przykład 1, § 9.5).
14. $\dfrac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}$ (m całkowite).
15. $\dfrac{x^m}{\sqrt{x^2+c}}$ (m całkowite).
16. $\dfrac{ax+b}{(x^2+c^2)^n\sqrt{px^2+qx+r}}$.

Wskazówka. Udowodnić, że jeśli R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, to

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = W(x) + \frac{U(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie U i W są funkcjami wymiernymi. Wyprowadzić stąd (na mocy 14·16) ogólną metodę całkowania niewymierności stopnia drugiego.

17. $\operatorname{ctg}^n x$.

18. $\sec^n x$.

19. $\sin^m x \cos^n x$.

20. $\cos x \cos 2x \cos 3x$.

21. $\dfrac{\arcsin x}{x^3}$.

§ 10. Całki oznaczone

10.1. Definicja i przykłady. Niech dana będzie funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$. Przez *całkę oznaczoną* $f(x)$ *po* dx *od* a *do* b rozumiemy

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f w przedziale ab, tj. $F'(x) = f(x)$ dla $a < x < b$ oraz $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$.

Całka oznaczona nie zależy od wyboru funkcji F; znaczy to, że jeśli G jest również funkcją pierwotną funkcji f, to

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

Wynika to natychmiast stąd, że różnica między funkcjami G i F jest stała w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ (por. uwagę do tw. 4, § 7.5).

Wzór (1) przyjmujemy też w przypadku, gdy $b < a$. Mamy więc

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

oraz

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Z twierdzenia 2 z § 9.2 wynika natychmiast, że *każda funkcja ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ posiada całkę $\int_a^b f(x)\,dx$, czyli* — jak mówimy — jest *całkowalna w tym przedziale.*

Na oznaczenie różnicy $F(b) - F(a)$ używamy też symbolu

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

U w a g a. Jak z definicji wynika, całka oznaczona $\int_a^b f(x)\,dx$ zależy od funkcji f i od granic całkowania a i b. Nie jest natomiast funkcją zmiennej x (x występuje tu jako tzw. *zmienna związana*). Wartość całki nie ulegnie zmianie, jeśli zmienną x zastąpimy przez jakąś inną zmienną, np. t:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

PRZYKŁAD 1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$. Istotnie,

$$\int c\,dx = cx + C, \quad \text{skąd} \quad \int_a^b c\,dx = [cx]_a^b = c(b-a).$$

PRZYKŁAD 2. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, ponieważ

$$\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C, \quad \text{skąd} \quad \int_0^1 x^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

PRZYKŁAD 3. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{1}{2}\pi + \cos 0 = 1.$

PRZYKŁAD 4. Następujące całki oznaczone (*Fouriera*, por. § 11.7) znajdujemy z łatwością na podstawie wzorów na całki nieoznaczone (§ 9.6): jeśli m i n oznaczają dwie różne liczby naturalne, to

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx;$$

dla dowolnych m i n naturalnych

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0;$$

dla dowolnego naturalnego m

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx.$$

PRZYKŁAD 5. Dla dowolnego naturalnego n zachodzą wzory

$$(4) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

Wynikają one z łatwością ze wzoru rekurencyjnego (§ 9.6)

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx \qquad (n \geqslant 2)$$

oraz ze wzorów

$$\left[-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\pi/2} = 0, \quad \int_0^{\pi/2}\sin^1 x\,dx = 1, \quad \int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Zauważmy, że wzory (4) pozostają w mocy, jeśli zastąpić sinus przez cosinus.

10.2. Wzory rachunkowe. Pierwsze trzy wzory ogólne dla całek nieoznaczonych (§ 9.3) prowadzą natychmiast do następujących trzech wzorów rachunkowych na całki oznaczone (o funkcjach podcałkowych zakładamy, że są ciągłe w domkniętym przedziale całkowania):

TWIERDZENIE 1.

$$\int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

TWIERDZENIE 2.

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

TWIERDZENIE 3.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Wzór na całkowanie przez podstawienie prowadzi do następującego wzoru:

TWIERDZENIE 4.

$$\int_a^b g\big(f(x)\big)f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

Niech bowiem $G(y)$ będzie funkcją pierwotną funkcji $g(y)$. Wówczas (na mocy wzoru z twierdzenia 4, § 9.3) $G\big(f(x)\big)$ jest funkcją pierwotną funkcji $g\big(f(x)\big)f'(x)$. A zatem na mocy definicji całki oznaczonej

$$\int_a^b g\big(f(x)\big)f'(x)dx = G\big(f(b)\big) - G\big(f(a)\big) = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

TWIERDZENIE 5 (O PODZIALE PRZEDZIAŁU CAŁKOWANIA).

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bo oznaczając przez F funkcję pierwotną funkcji f, mamy

$$\big(F(c)-F(a)\big)+\big(F(b)-F(c)\big) = F(b)-F(a).$$

TWIERDZENIE 6. *Jeśli* $f(x) \geqslant 0$ *i* $a < b$, *to*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Istotnie, oznaczając jak poprzednio przez F funkcję pierwotną funkcji f, mamy $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, skąd wynika, że funkcja F jest rosnąca (w szerszym sensie). A zatem $F(a) \leqslant F(b)$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \geqslant 0.$$

Twierdzenie 6 pociąga za sobą następujące ogólniejsze

TWIERDZENIE 7. *Jeśli* $f(x) \leqslant g(x)$ *i* $a < b$, *to*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Z założenia $g(x)-f(x) \geqslant 0$. Przeto, na mocy twierdzenia 6, $\int_a^b \big(g(x)-$ $-f(x)\big)dx \geqslant 0$, a stąd, na podstawie twierdzenia 1,

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Jak widać z twierdzenia 7, relacja $\leqslant$ przy całkowaniu zachowuje się (o ile $a < b$). Wyprowadzimy stąd dwa następujące wzory:

TWIERDZENIE 8.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \textit{o ile} \quad a < b.$$

Z podwójnej bowiem nierówności $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ wynika przez całkowanie (na mocy twierdzenia 7)

$$\int_a^b \big(-|f(x)|\big)dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

czyli

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

skąd żądany wzór (bo nierówność $-u \leqslant v \leqslant u$ pociąga za sobą nierówność $|v| \leqslant u$, por. (17), § 1.6).

TWIERDZENIE 9 (WZÓR NA WARTOŚĆ ŚREDNIĄ).

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = hf(a+\theta h),$$

gdzie θ jest odpowiednio dobraną liczbą spełniającą warunek $0 < \theta < 1$.

Niech bowiem F oznacza funkcję pierwotną funkcji f, tj. $F'(x) = f(x)$. Mamy więc

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = F(a+h)-F(a) = hF'(a+\theta h) = hf(a+\theta h),$$

na mocy twierdzenia o wartości średniej rachunku różniczkowego (por. uwagę 2, § 7.5).

TWIERDZENIE 10. *Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Przyjmijmy*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt\text{[1]}. \tag{5}$$

Zachodzi wówczas następujący podstawowy wzór:

$$g'(x) = f(x), \quad \textit{czyli} \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \tag{6}$$

czyli całka $\int_a^x f(t)dt$, traktowana jako funkcja górnej granicy całkowania, jest funkcją pierwotną funkcji podcałkowej.

Niech bowiem F oznacza jakąkolwiek funkcję pierwotną funkcji f, tj. $F'(x) = f(x)$. W myśl wzoru (1), § 10.1, mamy

$$g(x) = F(x)-F(a).$$

Różniczkując otrzymujemy

$$g'(x) = F'(x) = f(x).$$

Uwaga 1. Na krańcach przedziału całkowania mamy

$$g'_+(a) = f(a) \quad \text{oraz} \quad g'_-(b) = f(b).$$

Uwaga 2. Zauważmy, że funkcja g jako funkcja różniczkowalna jest ciągła.

---

[1] Można też pisać $g(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Twierdzenie 11. *Jeśli ciąg funkcji f_n jest zbieżny jednostajnie do funkcji f w przedziale ab, to całka granicy jest równa granicy całek:*

$$(7)\quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)dx, \qquad \textit{czyli} \qquad \int_a^b \big(\lim_{n=\infty} f_n(x)\big)dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Ponieważ granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą (tw. 1, § 6.1), funkcja f jest całkowalna. Stosując do funkcji f i f_n wzór z twierdzenia 1, mamy więc

$$(8)\qquad \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \big(f(x)-f_n(x)\big)dx.$$

Zarazem, ze względu na zbieżność jednostajną ciągu funkcji $f_1, f_2, \ldots$ do funkcji f, istnieje dla danego $\varepsilon > 0$ takie k, że dla $n > k$ mamy $|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$. Stąd na mocy wzoru (8) oraz twierdzeń 8 i 7 mamy

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x)-f_n(x)\big)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx \leqslant \varepsilon|b-a|.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że dla $n > k$ zachodzi nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leqslant \varepsilon|b-a|.$$

Oznacza to, że spełniona jest równość (7).

Jako wniosek z twierdzenia 11, otrzymujemy

Twierdzenie 12.

$$\int_a^b \Big[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\Big]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

przy założeniu, że funkcje f_n są ciągłe i że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$.

Przykład 1. Aby obliczyć całkę

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx,$$

podstawiamy $x = \sin t$. Mamy więc $0 = \sin 0$, $1 = \sin\frac{1}{2}\pi$. A zatem (por. przykład 5, § 10.1)

$$(9)\quad \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\, dt = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

PRZYKŁAD 2.

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b \cos nx\,dx = 0 = \lim_{n=\infty}\int_a^b \sin nx\,dx.$$

Istotnie, podstawiając $y = nx$, otrzymujemy

$$\int_a^b \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb}\cos y\,dy = \frac{1}{n}(\sin nb - \sin na).$$

Ponieważ $|\sin nb - \sin na| \leqslant 2$, jest więc $\lim\limits_{n=\infty}\int_a^b \cos nx\,dx = 0$.

Analogicznie dowodzi się, że $\lim\limits_{n=\infty}\int_a^b \sin nx\,dx = 0$.

PRZYKŁAD 3. Ogólniej, zachodzi następujący wzór:

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0 = \lim_{n=\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx,$$

gdzie f oznacza dowolną funkcję ciągłą.

Niech dana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Ze względu na ciągłość jednostajną funkcji f w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ istnieje takie m, że jeśli odcinek ab podzielić na m różnych odcinków, to dla każdej pary punktów x i x' należących do tego samego spośród tych m odcinków zachodzi nierówność $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ oznaczają punkty podziału; ponadto niech $a_0 = a$, $a_m = b$. Na mocy twierdzenia 5 mamy

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^m \Big(f(a_k)\int_{a_{k-1}}^{a_k}\cos nx\,dx + \int_{a_{k-1}}^{a_k}\big(f(x)-f(a_k)\big)\cos nx\,dx\Big).$$

A więc (por. tw. 8)

$$\Big|\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\Big| \leqslant \sum_{k=1}^m |f(a_k)|\Big|\int_{a_{k-1}}^{a_k}\cos nx\,dx\Big| + \varepsilon(b-a),$$

gdyż

$$|f(x)-f(a_k)|\,|\cos nx| \leqslant |f(x)-f(a_k)| < \varepsilon.$$

Ponieważ zaś, jak dowiedliśmy,

$$\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} \cos nx\,dx\right| = \frac{1}{n}|\sin na_k - \sin na_{k-1}| \leqslant \frac{2}{n},$$

przeto oznaczając przez M kres górny funkcji $|f(x)|$ w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, otrzymujemy

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\right| \leqslant \frac{2}{n}Mm + \varepsilon(b-a).$$

Dobierając więc n tak duże, aby $\frac{2}{n}Mm < \varepsilon$, mamy

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\,dx\right| < \varepsilon(1+b-a).$$

Wynika stąd pierwsza z równości przykładu. Dowód drugiej jest analogiczny.

Przykład 4. Jeśli nie znamy całki nieoznaczonej danej funkcji, lecz możemy tę funkcję rozwinąć w szereg jednostajnie zbieżny funkcji, które potrafimy scałkować (np. w szereg potęgowy), to zastosowanie twierdzenia 12 prowadzi do wyrażenia całki oznaczonej przez szereg.

Obliczymy w ten sposób całkę eliptyczną (por. uwaga, § 9.5)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \qquad (k^2 < 1).$$

Jak wiemy (por. § 8.4):

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + \ldots \qquad (|t| < 1).$$

Zastępując t przez $k\sin x$, mamy więc

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 x + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 x + \ldots$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie w przedziale $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ (nawet na całej osi X), szereg bowiem przedstawiający $1/\sqrt{1-t^2}$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $-|k| \leqslant t \leqslant |k|$. Całkując wyraz po wyrazie i opierając się na wzorze (4) z § 10.1

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

otrzymujemy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\ldots\right].$$

10.3. Całka oznaczona jako granica sum. Udowodnimy obecnie twierdzenia, na których opierają się ważne zastosowania geometryczne całki oznaczonej.

TWIERDZENIE 1. *Niech dana będzie funkcja f, ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, oraz liczba $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas liczba $\delta > 0$ o własności następującej: jeżeli punkty $a_0 < a_1 < \ldots < a_m$ spełniają dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$ nierówność $a_k - a_{k-1} < \delta$, przy czym $a_0 = a$ i $a_m = b$, i jeżeli punkty $x_1, \ldots, x_m$ wybrane są odpowiednio z przedziałów $a_0a_1, \ldots, a_{m-1}a_m$ (tj. $a_{k-1} \leqslant x_k \leqslant a_k$), to*

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Istotnie, ze względu na jednostajną ciągłość funkcji f w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ (por. tw. 1, § 5.4) istnieje takie $\delta > 0$, że warunek $|x - x'| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/(b-a)$. Na mocy twierdzeń 5 i 9 z § 10.2, mamy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} f(x)\,dx =$$

$$= f(x_1')(a_1 - a_0) + \ldots + f(x_m')(a_m - a_{m-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(x_k')(a_k - a_{k-1}),$$

gdzie x_k' jest odpowiednio dobraną liczbą w przedziale $a_{k-1}a_k$.

Ponieważ punkty x_k i x_k' należą do przedziału $a_{k-1}a_k$, przeto odległość ich jest nie większa od długości tego przedziału, tj. $|x_k - x_k'| \leqslant a_k - a_{k-1} < \delta$. Stąd zaś wynika, że $|f(x_k) - f(x_k')| < \varepsilon/(b-a)$. W rezultacie

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}\big(f(x_k) - f(x_k')\big)(a_k - a_{k-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_k')|(a_k - a_{k-1}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{m}(a_k - a_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

W ten sposób twierdzenie 1 jest udowodnione.

Weźmy teraz pod uwagę zamiast jednego podziału odcinka ab (wyznaczonego przez punkty $a_0, a_1, \ldots, a_m$) ciąg podziałów tego odcinka na mniejsze odcinki. Niech n-ty podział wyznaczony będzie przez punkty

$$a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,l_n}, \quad \text{przy czym} \quad a_{n,0} = a, a_{n,l_n} = b.$$

Niech r_n oznacza długość największego odcinka n-tego podziału. Mówić będziemy, że powyższy ciąg podziałów jest *normalny*, jeśli $\lim\limits_{n=\infty} r_n = 0$. Zachodzi następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2. *Niech dana będzie funkcja f, ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, oraz ciąg normalny podziałów tego odcinka. Jeśli punkt $x_{n,k}$ należy do k-tego przedziału n-tego podziału (tj. $a_{n,k-1} \leqslant x_{n,k} \leqslant a_{n,k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, l_n$, $n = 1, 2, \ldots$), to*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}). \tag{10}$$

Niech bowiem dane będzie $\varepsilon > 0$. Dobieramy N w taki sposób, aby dla $n > N$ zachodziła nierówność $r_n < \delta$, tj. aby wszystkie przedziały n-tego podziału miały długość mniejszą od δ (gdzie δ ma to samo znaczenie, co w twierdzeniu poprzednim). Na mocy twierdzenia 1 mamy więc

$$\left| \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}) - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Oznacza to, że spełniona jest równość (10).

Uwaga. Znakowanie $\int\limits_a^b y\,dx$ pozostaje w bliskim związku pojęciowym i historycznym z twierdzeniem 2. Symbol $\int$, zmodyfikowana litera S, oznaczać miał sumowanie nieskończenie wielu „nieskończenie małych” składników postaci $y\,dx$; ta niesprecyzowana pod względem logicznym koncepcja znajduje obecnie swój ścisły wyraz w twierdzeniu 2, które — jak widać — przedstawia całkę oznaczoną nie jako sumę nieskończoną, lecz jako granicę sum o rosnącej liczbie składników.

Do definicji całki opartej na wzorze (10) powrócimy w § 10.11.

10.4. Całka jako pole. Niech $f(x) \geqslant 0$ dla $a \leqslant x \leqslant b$.

Całka $\int\limits_a^b f(x)dx$ jest to pole obszaru P złożonego z punktów (x, y) płaszczyzny, spełniających warunki

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Jest tak istotnie, gdy funkcja f jest liniowa. Obszar ten jest wówczas trapezem, którego podstawy (równoległe do osi Y) mają długość $f(a)$ i $f(b)$, a wysokość ma długość $b-a$. Pole trapezu jest więc

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Z drugiej strony, funkcja f jako funkcja liniowa jest postaci $f(x) = cx+d$. A więc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}c(b^2-a^2)+d(b-a) = (b-a)(\tfrac{1}{2}cb+\tfrac{1}{2}ca+d) =$$
$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

bowiem

$$f(a) = ca+d \quad \text{i} \quad f(b) = cb+d.$$

Widzimy więc, że w przypadku, gdy funkcja f jest liniowa, pojęcie pola znane z geometrii elementarnej, równoważne jest powyżej zdefiniowanemu pojęciu pola jako całki oznaczonej. Równoważność ta zachodzi też w wypadku ogólniejszym, gdy funkcja f jest przedziałami liniowa (por. § 6.4), tj. gdy wykres tej funkcji jest łamaną. Obszar zawarty bowiem między tą łamaną a osią X składa się z pewnej ilości trapezów, pole jego jest więc sumą pól trapezów; ponieważ zaś pole każdego z tych trapezów jest — jak przed chwilą stwierdziliśmy — odpowiednią całką, zatem pole całego obszaru jest sumą tych całek, czyli jest równe $\int_a^b f(x)\,dx$ (na mocy tw. 5, § 10.2).

W ogólnym wypadku, gdy f jest dowolną funkcją ciągłą, funkcja f jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych (por. § 6.4): $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$. Stąd na mocy twierdzenia 11 z § 10.2

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Widzimy więc, że pole obszaru wyznaczonego przez krzywą $y = f(x)$ (określone jako całka $\int_a^b f(x)\,dx$) jest granicą pól wieloboków „wpisanych" w tę krzywą.

Uwaga 1. Zachodzi tu więc zupełna analogia z polem koła, które określamy jako granicę pól wielokątów wpisanych (lub opisanych). Podobnie pole obszaru P wyznaczonego przez krzywą $y = f(x)$ określamy jako całkę $\int_a^b f(x)\,dx$.

Można by jednak pole obszaru zdefiniować na gruncie teorii miary — której tu rozpatrywać nie będziemy — i następnie udowodnić, że definicja ta równoważna jest definicji pola określonej za pomocą całki (dowód taki przeprowadziliśmy w wypadku najbardziej elementarnym, mianowicie, gdy funkcja f jest liniowa, względnie przedziałami liniowa).

Przykład 1. Niech $y = \sqrt{r^2-x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$. Obliczymy

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Znajdziemy w tym celu całkę nieoznaczoną. Podstawiając $z = x/r$ otrzymujemy (por. tw. 4, § 9.3):

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2 \int \sqrt{1-z^2}\,dz =$$

$$= r^2\left(\frac{1}{2}\arcsin z + \frac{1}{2} z\sqrt{1-z^2}\right) =$$

$$= r^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\right).$$

Stąd

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx = r^2\left(\tfrac{1}{2}\arcsin 1 - \tfrac{1}{2}\arcsin(-1)\right) = \tfrac{1}{2}\pi r^2,$$

bo

$$\arcsin 1 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{a} \quad \arcsin(-1) = -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób znany z geometrii elementarnej wzór na pole półkola o promieniu r.

Przykład 2. Pole obszaru zawartego między łukiem paraboli $y = x^2$, osią X i prostą $x = a$ wyraża się całką

$$\int_{0}^{a} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}a^3.$$

Przykład 3. Pole elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

obliczamy jak następuje: Równanie powyższe daje

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

skąd pole elipsy jest równe

$$2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Stosując podobnie jak w przykładzie 1 wzór na całkę nieoznaczoną $\int\sqrt{1-z^2}dz$, znajdujemy

$$2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \pi ab.$$

PRZYKŁAD 4. Pole między sinusoidą a odcinkiem 0π osi X jest to

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

PRZYKŁAD 5. Niech dane będą dwie funkcje ciągłe $u(x)$ i $v(x)$ określone w odcinku $a \leqslant x \leqslant b$. Niech przy tym $u(x) < v(x)$ dla $a < x < b$. Obszar N zawarty pomiędzy tymi dwiema krzywymi, tj. zbiór punktów x, y płaszczyzny, spełniających warunki

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad u(x) \leqslant y \leqslant v(x),$$

nazywamy *obszarem normalnym*. Pole obszaru normalnego N jest to

$$\int_a^b \big(v(x)-u(x)\big)\,dx.$$

Istotnie, jeśli stale $u(x) \geqslant 0$, to obszar N otrzymujemy z obszaru zawartego między krzywą $y = v(x)$ a osią X przez odjęcie obszaru zawartego między krzywą $y = u(x)$ a osią X; pole pierwszego obszaru jest to $\int_a^b v(x)dx$, pole drugiego: $\int_a^b u(x)dx$, a zatem pole N jest różnicą tych całek.

Jeśli zaś nierówność $u(x) \geqslant 0$ zachodzi nie dla wszystkich x, to oznaczamy przez m kres dolny funkcji u w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ i przez N_0 obszar normalny wyznaczony przez krzywe $u(x)-m$ i $v(x)-m$. Obszar N_0 powstaje z N przez przesunięcie, jest więc do niego przystający. A zatem

$$\text{pole } N = \text{pole } N_0 = \int_a^b \big\{\big(v(x)-m\big)-\big(u(x)-m\big)\big\}\,dx = \int_a^b \big(v(x)-u(x)\big)\,dx.$$

Uwaga 2. Gdy rozważamy pole obszaru normalnego, jest rzeczą obojętną, czy uwzględniamy jego obwód. Obwodowi bowiem przypisujemy pole 0. Pochodzi to stąd, że krzywą $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, można zamknąć w obszar normalny o polu dowolnie małym, mianowicie przez obszar zawarty pomiędzy łukami $y = f(x)+\varepsilon$ i $y = f(x)-\varepsilon$; pole tego obszaru jest $2\varepsilon(b-a)$.

Uwaga 3. Symbol $y\,dx$ nazywamy *elementem pola* (por. § 7.13).

Uwaga 4. Całkę $\int\limits_a^b f(x)dx$ interpretować możemy jako pole również bez założenia, że $f(x) \geqslant 0$, o ile umówimy się uważać pole obszarów położonych pod osią X za ujemne (przy czym $a < b$). Jeśli więc przedział ab można tak podzielić na mniejsze przedziały, że w każdym z tych przedziałów z osobna funkcja jest stale bądź nieujemna, bądź niedodatnia, to $\int\limits_a^b f(x)dx$ jest sumą algebraiczną pól wyznaczonych przez łuki krzywej $y = f(x)$ w każdym z tych przedziałów z osobna.

Na przykład dla krzywej $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, przedział $0, 2\pi$ dzielimy na połowy. Sinusoida tworzy z przedziałem $0, \pi$ osi X obszar o polu 2, a z przedziałem $\pi, 2\pi$ obszar o polu -2. Algebraiczna suma tych pól, tj.

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0.$$

Uwaga 5. Gdy interpretować całkę oznaczoną jako pole, wiele z poprzednio udowodnionych twierdzeń nabiera przejrzystej treści geometrycznej (zwłaszcza gdy funkcja podcałkowa jest nieujemna). Na przykład twierdzenie 9 z § 10.2 oznacza, że obszar wyznaczony przez łuk $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, oś X i odcinki pionowe położone na prostych $x = a$ i $x = b$ ma to samo pole, co prostokąt mający za podstawę odcinek $a \leqslant x \leqslant b$ osi X, a za wysokość rzędną odpowiednio dobranego punktu na łuku $y = f(x)$, $a < x < b$.

Z twierdzenia 10 z § 10.2 (por. uwagę 2) wynika, że pole obszaru wyznaczonego przez łuk $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant x'$, zmienia się w sposób ciągły wraz z x'.

Twierdzenie 11 z § 10.2 oznacza, że jeśli funkcje f_n są zbieżne jednostajnie w przedziale ab do funkcji f, to pola odpowiednich obszarów są zbieżne do pola obszaru wyznaczonego przez f.

10.5. Długość łuku. Niech dana będzie funkcja f w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, o ciągłej pochodnej $\dfrac{dy}{dx}$. Całka

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{11}$$

przedstawia *długość łuku* złożonego z punktów (x, y), spełniających warunki

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{12}$$

Jest tak istotnie, gdy funkcja f jest liniowa, tj. gdy rozważana krzywa jest odcinkiem łączącym punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Długość odcinka jest to odległość jego końców, czyli

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$$

Ten sam wynik otrzymujemy za pomocą całki. Przyjmijmy bowiem $f(x) = cx+d$. Stąd $f'(x) = c$. A zatem

$$\int_a^b \sqrt{1+c^2}\,dx = \sqrt{1+c^2}(b-a) = \sqrt{(b-a)^2+\big(f(b)-f(a)\big)^2},$$

ponieważ $c = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

W ogólnym wypadku (gdy nie zakładamy liniowości funkcji f) uzasadnienie przyjętej powyżej definicji długości łuku znajdujemy w następującej konstrukcji.

Jak wiemy (por. § 6.4), łuk krzywej dany przez warunki (12) można aproksymować przez łamane wpisane w ten łuk (patrz rys. 10, § 6.4). Otóż udowodnimy, że oznaczając przez L długość tego łuku wyrażoną przez całkę (11), a przez $L_1, L_2, \ldots$ długości kolejnych łamanych, mamy

$$L = \lim_{n=\infty} L_n.$$

Niech bowiem n-ta łamana powstaje przez łączenie odcinkami kolejno punktów: $\big(a_{n,0}, f(a_{n,0})\big), \big(a_{n,1}, f(a_{n,1})\big), \ldots, \big(a_{n,l_n}, f(a_{n,l_n})\big)$, przy czym $a_{n,0} = a$, $a_{n,l_n} = b$ oraz długość największego przedziału n-tego podziału dąży do 0, gdy n dąży do ∞ (tj. ciąg tych podziałów jest normalny w sensie § 10.3). Długość n-tej łamanej jest sumą długości poszczególnych odcinków, z których ona powstaje, czyli

$$L_n = \sum_{k=1}^{l_n} \sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+\big(f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})\big)^2}.$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy

$$L_n = \sum_{k=1}^{l_n} (a_{n,k}-a_{n,k-1})\sqrt{1+\big(f'(x_{n,k})\big)^2}, \quad \text{gdzie} \quad a_{n,k-1} \leqslant x_{n,k} \leqslant a_{n,k}.$$

Stąd wnosimy na mocy twierdzenia 2 z § 10.2, wzór (10), w którym podstawiamy $\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}$ na miejsce funkcji $f(x)$, że

$$\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx = \lim_{n=\infty} L_n = L.$$

Uwaga. Uwagi przez nas poczynione na temat definicji pola przenoszą się na definicję długości łuku: na gruncie ogólnej teorii miary określa się pojęcie długości krzywej i dowodzi się, że dla łuków postaci (12) definicja ta zgodna jest z podaną tu definicją za pomocą całki (11). Ponieważ jednak w niniejszych wykładach nie dysponujemy teorią miary, długość łuku (12) określamy jako równą całce (11).

Rozważana przez nas aproksymacja długości łuku przez długości łamanych wpisanych jest uogólnieniem znanej z geometrii elementarnej aproksymacji długości okręgu koła przez obwody wieloboków wpisanych. Udowodnimy, że długość łuku koła w sensie geometrii elementarnej równa się długości w sensie tu przyjętej definicji.

PRZYKŁAD. Niech $y = \sqrt{r^2-x^2}$, $r\cos\beta \leqslant x \leqslant r\cos\alpha$ $(0<\alpha<\beta<\pi)$. Rozważany łuk jest częścią półokręgu o promieniu r i o środku 0. Obliczymy całkę (11). Mamy

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad \text{skąd} \quad \int\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Podstawiając $x = r\cos t$ znajdujemy

$$\int\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = -rt = -r\arccos\frac{x}{r}.$$

Stąd

$$\int\limits_{r\cos\beta}^{r\cos\alpha}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = (\beta-\alpha)r,$$

zgodnie ze znanym wzorem z geometrii elementarnej.

Przyjmijmy

$$s(x) = \int\limits_a^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

Funkcja $s(x)$, tj. długość łuku traktowana jako funkcja odciętej prawego (zmiennego) końca łuku, jest funkcją rosnącą. Istnieje więc funkcja względem niej odwrotna $x = x(s)$, która przedstawia x jako funkcję długości łuku. Zachodzą wzory

$$\text{(13)} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Oznaczając przez α kąt utworzony przez styczną do krzywej z osią X, mamy $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, a zatem $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$. Znaczy to, że pochodna $\dfrac{dx}{ds}$ jest *cosinusem kierunkowym* względem osi X stycznej do krzywej $y = f(x)$.

Wynika to również ze wzorów

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \sin\alpha \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

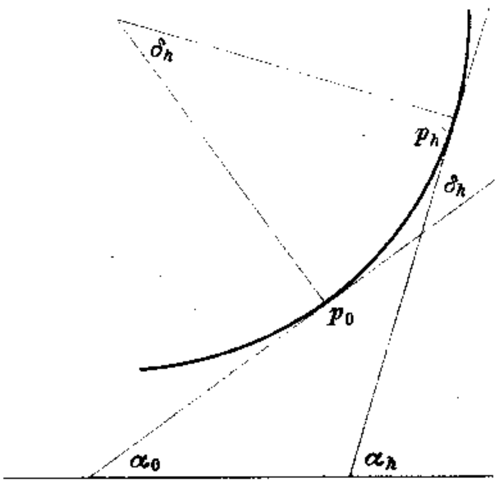
Uwaga. Na *element długości* mamy wzór symboliczny analogiczny do wzoru Pitagorasa: $ds^2 = dx^2+dy^2$, o przejrzystej treści geometrycznej (por. pojęcie różniczki, § 7.13).

Krzywizna. Oznaczmy jak poprzednio przez a kąt utworzony przez styczną z osią X. Kąt ten jest funkcją x; uważając x za funkcję długości s, przedstawiamy a jako funkcję $a(s)$ zmiennej s. Pochodną $k = \frac{da}{ds}$ nazywamy *krzywizną* krzywej $y = f(x)$ w danym punkcie. Odwrotność $\frac{1}{|k|} = \varrho$ nazywamy *promieniem krzywizny*.

Geometrycznie krzywiznę k interpretujemy jak następuje: Poprowadźmy styczne do rozważanej krzywej w punktach

$$p_0 = \big(x(s_0), y(s_0)\big) \quad \text{oraz} \quad p_h = \big(x(s_0+h), y(s_0+h)\big).$$

Styczne te tworzą z dodatnim kierunkiem osi X kąty $a_0 = a(s_0)$ oraz $a_h = a(s_0+h)$. Kąt δ_h między tymi stycznymi jest równy $a_h - a_0$. Ten sam kąt tworzą ze sobą normalne do krzywej w punktach p_0 i p_h. Rozważmy stosunek tego kąta do długości łuku p_0p_h, tj. do h. Krzywizna krzywej $y = f(x)$ w punkcie p_0 jest to granica, do której dąży ten stosunek, gdy h dąży do 0.



Rys. 23

W szczególności, jeśli krzywa nasza jest łukiem koła $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$, to $h = -r\delta_h$, a więc rozważany stosunek ma stałą wartość $-1/r$. Taką samą więc wartość ma krzywizna k, a promieniem krzywizny jest promień koła r.

W wypadku linii prostej normalne są równoległe. A zatem $\delta_h = 0$ stale i krzywizna jest równa 0; promień krzywizny jest więc nieskończony.

Jeśli $k \neq 0$, to punkt położony na normalnej w odległości ϱ od punktu p_0 po tej samej stronie stycznej, po której lokalnie leży krzywa, nazywamy *środkiem krzywizny*. Można dowieść, że punkt ten jest granicznym położeniem, do którego zmierza punkt przecięcia normalnych w punktach p_0 i p_h, gdy h dąży do 0.

Krzywiznę k wyrazić możemy we współrzędnych x i y jak następuje: Biorąc pod uwagę, że

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

oraz opierając się na wzorze (13) otrzymujemy

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}},$$

czyli

$$k = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{14}$$

Środek masy. Niech dany będzie na płaszczyźnie układ n punktów materialnych $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ i o masach $m_1, \ldots, m_n$. *Środkiem masy* tego układu jest punkt o współrzędnych

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}, \qquad \bar{y} = \frac{m_1y_1+\ldots+m_ny_n}{m_1+\ldots+m_n}. \tag{15}$$

Aby określić środek masy łuku $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, o stałej gęstości g, postępujemy jak następuje: Przedstawmy (jak to już wyżej czyniliśmy) x jako funkcję długości s; tj. $x = x(s)$; stąd $y = f(x(s)) = y(s)$. Niech S oznacza długość łuku $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Podzielmy łuk ten na n równych części. Stanowi to podział przedziału $0S$ na n równych przedziałów; niech punktami wyznaczającymi ten podział będą

$$0 = s_{n,0}, s_{n,1}, \ldots, s_{n,n} = S.$$

Punkt o współrzędnych $x(s_{n,k})$, $y(s_{n,k})$ jest końcem k-tego łuku n-tego podziału; przyporządkujmy mu masę tego łuku. Masa ta jest iloczynem gęstości przez długość łuku, czyli wynosi $g\cdot(s_{n,k}-s_{n,k-1})$. A zatem przy danym n, środkiem masy układu punktów

$$\big(x(s_{n,1}), y(s_{n,1})\big), \quad \ldots, \quad \big(x(s_{n,n}), y(s_{n,n})\big)$$

jest punkt o współrzędnych

$$x_n = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} x(s_{n,k})(s_{n,k}-s_{n,k-1}), \qquad y_n = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} y(s_{n,k})(s_{n,k}-s_{n,k-1}),$$

bowiem masa łuku jest równa gS.

Graniczne położenie punktu (x_n, y_n), gdy n dąży do ∞, jest położeniem środka masy rozważanego łuku. Współrzędnymi środka masy są więc

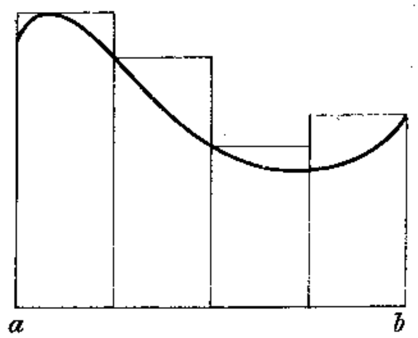
$$\bar{x} = \lim_{n=\infty} x_n = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds \quad \text{oraz} \quad \bar{y} = \lim_{n=\infty} y_n = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds.$$

10.6. Objętość i powierzchnia figur obrotowych. Niech dana będzie funkcja ciągła $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Niech przy tym $f(x) \geqslant 0$. Oznaczmy, jak w § 10.4, przez P obszar złożony z punktów (x, y) spełniających warunki $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. Obracając obszar P dokoła osi X, otrzymujemy bryłę obrotową. Oznaczmy jej objętość przez W. Mamy

$$W = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{17}$$

Aby wzór ten uzasadnić, weźmy pod uwagę normalny ciąg podziałów, zachowując znakowanie z twierdzenia 2 z § 10.3. Niech $f(x_{n,k})$ będzie kresem górnym funkcji f w przedziale $a_{n,k-1}, a_{n,k}$. Zastępując łuk naszej krzywej położony nad tym przedziałem przez odcinek $y = f(x_{n,k})$, otrzymamy przy obrocie dokoła osi X walec o podstawie $\pi f(x_{n,k})^2$ i o wysokości $a_{n,k} - a_{n,k-1}$, a zatem o objętości

$$\pi f(x_{n,k})^2 (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$



Rys. 24

Postępując w ten sposób dla każdego k (przy stałym n) zastępujemy rozważaną przez nas bryłę obrotową przez bryłę na niej opisaną, złożoną z pewnej ilości walców. Objętość tej bryły jest sumą objętości poszczególnych walców; oznaczając tę objętość przez W_n, mamy więc

$$W_n = \pi \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})^2 (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

W granicy, na mocy twierdzenia 2 z § 10.3, otrzymujemy

$$W = \lim_{n=\infty} W_n.$$

Analogicznie — gdybyśmy w powyższej konstrukcji zastąpili kres górny przez kres dolny — dowiedlibyśmy, że W jest granicą objętości pewnych brył wpisanych w rozważaną bryłę obrotową, z których każda składa się z pewnej ilości walców.

Oznaczmy przez B pole powierzchni zakreślonej przez łuk $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, tj. pole powierzchni bocznej rozważanej bryły obrotowej. Zachodzi wzór (przy założeniu ciągłości pochodnej $f'(x)$)

(18) $$B = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Ażeby wzór ten uzasadnić, aproksymujemy rozważaną powierzchnię przez powierzchnie, których pole znane jest z geometrii elementarnej. Weźmy w tym celu pod uwagę ciąg łamanych, aproksymujących łuk $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, określonych w § 10.5 (por. rys. 10). Powierzchnia powstająca przez obrót takiej łamanej dokoła osi X składa się ze skończonej ilości stożków ściętych. Ponieważ tworzącą stożka ściętego jest odcinek łączący punkty $(a_{n,k-1}, f(a_{n,k-1}))$ i $(a_{n,k}, f(a_{n,k}))$, a więc odcinek o długości

$$\sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+\big(f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})\big)^2},$$

a promienie podstaw mają odpowiednio długości $f(a_{n,k})$ i $f(a_{n,k-1})$, przeto pole powierzchni bocznej stożka wynosi na mocy znanego z geometrii elementarnej wzoru

$$\pi\big(f(a_{n,k-1})+f(a_{n,k})\big)\sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+\big(f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})\big)^2}.$$

Oznaczając więc przez B_n pole powierzchni, która powstaje z obrotu n-tej łamanej, otrzymujemy

$$B_n = \pi\sum_{k=1}^{l_n}\big(f(a_{n,k-1})+f(a_{n,k})\big)\sqrt{(a_{n,k}-a_{n,k-1})^2+\big(f(a_{n,k})-f(a_{n,k-1})\big)^2} =$$
$$= \pi\sum_{k=1}^{l_n}\big(f(a_{n,k-1})+f(a_{n,k})\big)\sqrt{1+\big(f'(x_{n,k})\big)^2}\,(a_{n,k}-a_{n,k-1}),$$

gdzie $a_{n,k-1} \leqslant x_{n,k} \leqslant a_{n,k}$.

Udowodnimy, że

(19) $$B = \lim_{n=\infty} B_n.$$

Porównajmy w tym celu B_n z

$$C_n = 2\pi\sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})\sqrt{1+\big(f'(x_{n,k})\big)^2}\,(a_{n,k}-a_{n,k-1}).$$

Na mocy twierdzenia 2 z § 10.3, gdzie funkcję $f(x)$ należy zastąpić przez iloczyn $f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$, wnosimy, że $B = \lim\limits_{n=\infty} C_n$. Pozostaje więc do udowodnienia, że $\lim\limits_{n=\infty}(B_n - C_n) = 0$.

Otóż

$$B_n - C_n =$$
$$= \pi \sum_{k=1}^{l_n} \big(f(a_{n,k-1}) - f(x_{n,k}) + f(a_{n,k}) - f(x_{n,k})\big)\sqrt{1+(f'(x_{n,k}))^2}\,(a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Ze względu na założenie normalności rozpatrywanego ciągu podziałów przedziału całkowania możemy przyjąć, że jeśli punkty x i x' należą do tego samego przedziału n-tego podziału, to $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ (gdzie ε jest z góry daną liczbą dodatnią). A zatem

$$|f(a_{n,k-1}) - f(x_{n,k})| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |f(a_{n,k}) - f(x_{n,k})| < \varepsilon.$$

Oznaczając przez M kres górny funkcji $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ w przedziale ab, otrzymujemy natychmiast

$$|B_n - C_n| < 2\pi\varepsilon M(b-a), \quad \text{skąd} \quad \lim_{n=\infty}(B_n - C_n) = 0.$$

W ten sposób wzór (19) jest udowodniony.

Prostszy wzór na powierzchnię bryły obrotowej otrzymujemy, traktując podobnie jak w § 10.5 x jako funkcję długości łuku. Opierając się bowiem na pierwszej równości (13), mamy

$$B = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi \int_0^S y\,ds, \tag{20}$$

gdzie S oznacza długość łuku $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Wzór (20) możemy przekształcić jak następuje:

$$B = S\cdot 2\pi \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds = S\cdot 2\pi\bar{y}, \tag{21}$$

gdzie $\bar{y}$ oznacza rzędną środka masy łuku $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (por. (16)).

Inaczej mówiąc: *pole powierzchni utworzonej przez obrót łuku $y = f(x)$ dokoła osi X jest iloczynem długości tego łuku przez drogę zakreśloną przez jego środek masy.*

Jest to tzw. *twierdzenie Guldina.*

Przykład 1. Walec. Niech $f(x)$ ma wartość stałą r dla $0 \leqslant x \leqslant h$. Obszar P złożony z punktów (x, y) takich, że $0 \leqslant x \leqslant h$ i $0 \leqslant y \leqslant r$, jest prostokątem. Przy pełnym obrocie tego prostokąta dokoła osi X powstaje walec o wysokości h i o promieniu podstawy r. Objętość tego walca jest więc $\pi r^2 h$. Ten sam wynik uzyskujemy stosując wzór (17). Mamy bowiem

$$W = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 h.$$

Wzór (18) daje nam powierzchnię boczną walca (biorąc pod uwagę, że $y' = 0$)

$$B = 2\pi \int_0^h r\,dx = 2\pi r h,$$

zgodnie ze znanym wzorem z geometrii.

PRZYKŁAD 2. Stożek. Niech $y = cx$, $0 \leqslant x \leqslant h$. Obszar P jest w tym wypadku trójkątem. Przy obrocie powstaje stożek o wysokości h i o promieniu podstawy $r = ch$. Na mocy wzoru (17) objętość tego stożka wynosi

$$\pi \int_0^h c^2 x^2 dx = \tfrac{1}{3}\pi c^2 h^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Zgodnie ze wzorem (18) powierzchnia boczna stożka równa się

$$2\pi \int_0^h cx\sqrt{1+c^2}\,dx = \pi c h^2\sqrt{1+c^2} = \pi r l,$$

gdzie l oznacza długość tworzącej (ponieważ $l = h\sqrt{1+c^2}$).

PRZYKŁAD 3. Kula. Niech $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$. Zbiór punktów (x, y) wyznaczony przez te warunki jest półkolem. Obracając półkole dokoła osi X, otrzymujemy kulę o promieniu r. Objętość tej kuli jest to

$$\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} x^2 dx = 2\pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Aby obliczyć powierzchnię kuli, możemy zastosować wzór (20). W tym celu wyrażamy y w zależności od długości łuku s, tzn. $y = r\sin(s/r)$. Otrzymujemy na powierzchnię kuli wartość

$$2\pi \int_0^{\pi r} r\sin(s/r)\,ds = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin t\,dt = 2\pi r^2 \left[-\cos t\right]_0^{\pi} = 4\pi r^2.$$

10.7. Dwa twierdzenia o wartości średniej.

TWIERDZENIE 1. *Niech dane będą w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ dwie funkcje ciągłe f i g. Niech przy tym funkcja g ma znak stały. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx, \tag{22}$$

gdzie ξ jest odpowiednio dobraną wartością, spełniającą warunek $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Istotnie, niech m i M oznaczają kres dolny i górny funkcji $f(x)$ w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Mamy więc dla każdego x

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Załóżmy, że stale $g(x) \geqslant 0$. Mnożąc powyższą podwójną nierówność przez $g(x)$, otrzymujemy więc

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

stąd zaś przez całkowanie (por. tw. 7, § 10.2):

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

Wnosimy stąd (przy założeniu, że funkcja g nie jest identycznie równa 0, które oczywiście możemy uczynić), że

$$m \leqslant \left(\int_a^b f(x)g(x)dx : \int_a^b g(x)dx\right) \leqslant M.$$

Ze względu na własność Darboux funkcji f (która jest konsekwencją jej ciągłości), funkcja ta przybiera wszystkie wartości zawarte pomiędzy m i M. Istnieje więc takie ξ w odcinku ab, że

$$f(\xi) = \int_a^b f(x)g(x)dx : \int_a^b g(x)dx,$$

zatem wzór (22) jest spełniony.

W wypadku, gdy stale $g(x) \leqslant 0$, dowód jest zupełnie analogiczny.

Uwaga. Przy założeniu, że $g(x) \neq 0$, otrzymujemy krótszy dowód powyższego twierdzenia, opierając się na twierdzeniu Cauchy'ego z rachunku różniczkowego (wzór (12), § 7.5). Oznaczmy mianowicie przez $H(x)$ funkcję pierwotną funkcji $f(x)g(x)$ oraz przez $G(x)$ funkcję pierwotną funkcji $g(x)$. Mamy więc

$$H'(x) = f(x)g(x), \qquad G'(x) = g(x),$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = H(b)-H(a), \qquad \int_a^b g(x)dx = G(b)-G(a).$$

Na mocy twierdzenia Cauchy'ego

$$\frac{H(b)-H(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{H'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi),$$

skąd wzór (22).

TWIERDZENIE 2. *Jeśli funkcja f jest ciągła, a funkcja g jest monotoniczna i posiada ciągłą pochodną w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, to*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx \tag{23}$$

przy odpowiednio dobranej wartości ξ, należącej do przedziału ab.

Oznaczmy przez F funkcję pierwotną funkcji f, tj. $F'(x) = f(x)$. Ponieważ pochodna funkcji monotonicznej ma znak stały (por. tw. 2, § 7.7), możemy więc zastosować pierwsze twierdzenie o wartości średniej do iloczynu funkcji $F(x)g'(x)$. Stosując równocześnie całkowanie przez części, otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)F'(x)dx = [g(x)F(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx =$$

$$= \big(g(b)F(b) - g(a)F(a)\big) - F(\xi)\int_a^b g'(x)dx =$$

$$= g(b)F(b) - g(a)F(a) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a),$$

ponieważ $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$.

W rezultacie

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\big(F(\xi) - F(a)\big) + g(b)\big(F(b) - F(\xi)\big),$$

skąd otrzymujemy wzór (23), biorąc pod uwagę, że

$$F(\xi) - F(a) = \int_a^\xi f(x)dx \quad \text{oraz} \quad F(b) - F(\xi) = \int_\xi^b f(x)dx.$$

PRZYKŁADY I ZASTOSOWANIA. Twierdzenia o wartości średniej stosuje się szczególnie często w celu szacowania całek. Poznamy kilka takich zastosowań.

PRZYKŁAD 1. Niech $0 < a < b$. Udowodnimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin nx}{x}dx = 0. \tag{24}$$

Udowodnimy w tym celu, że

$$\left|\int_a^b \frac{\sin cx}{x}dx\right| < \frac{4}{ca}, \quad \text{o ile} \quad c > 0. \tag{25}$$

Stosujemy drugie twierdzenie o wartości średniej, podstawiając $f(x) = \sin cx$ oraz $g(x) = 1/x$. Otrzymujemy

$$\int_a^b \frac{\sin cx}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^\xi \sin cx\, dx + \frac{1}{b} \int_\xi^b \sin cx\, dx =$$

$$= \frac{1}{ac}(\cos ca - \cos c\xi) + \frac{1}{bc}(\cos c\xi - \cos cb).$$

Ponieważ $|\cos t| \leqslant 1$ oraz $a < b$, wnosimy stąd, że

$$\left|\int_a^b \frac{\sin cx}{x} dx\right| \leqslant \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc} < \frac{4}{ac}.$$

Ze wzoru (25) wynika natychmiast wzór (24).

Uwaga. Wzór (24) jest także natychmiastową konsekwencją wzoru z przykładu 3, § 10.2.

PRZYKŁAD 2. Posługując się pierwszym twierdzeniem o wartości średniej, można wyprowadzić wzór Taylora w następujący sposób.

W udowodnionym w przykładzie 13, § 9.3, wzorze

$$\int zy^{(n+1)} dx = zy^{(n)} - z' y^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n z^{(n)} y + (-1)^{n+1} \int z^{(n+1)} y\, dx$$

podstawmy $z = (b-x)^n$, $y = f(x)$, przy czym zakładamy, że funkcja f posiada ciągłą $(n+1)$-szą pochodną w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$.

Całkując od a do b, znajdujemy

$$\int_a^b (b-x)^n y^{(n+1)} dx = \left[(b-x)^n y^{(n)} + n(b-x)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + n!\, y\right]_a^b =$$

$$= n!\, f(b) - \left((b-a)^n f^{(n)}(a) + n(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \ldots + n!\, f(a)\right).$$

Z drugiej strony, ponieważ funkcja $(b-x)^n$ ma znak stały w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, przeto na mocy pierwszego twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy

$$\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\, dx = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b (b-x)^n dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Zestawiając otrzymane wzory uzyskujemy wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a.

10.8. Przybliżone metody całkowania. Interpolacja Lagrange'a. Mając dane $n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ na osi X, możemy określić wielomian n-tego stopnia $w(x)$, który w punktach tych przyjmuje z góry dane $n+1$ wartości: $y_0, y_1, \ldots, y_n$; to jest

(26) $$w(x_k) = y_k \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Określimy najpierw dla każdego k wielomian n-tego stopnia $u_k(x)$, mający tę własność, że

$$u_k(x_k) = 1 \quad \text{oraz} \quad u_k(x_m) = 0 \quad \text{dla każdego } m \neq k.$$

Przyjmujemy mianowicie:

$$u_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Z pomocą wielomianów $u_k(x)$ określamy wielomian $w(x)$

$$w(x) = y_0u_0(x)+y_1u_1(x)+\dots+y_nu_n(x). \tag{27}$$

Widać natychmiast, że jest to wielomian n-tego stopnia, spełniający warunek (26). Jest to tzw. *wielomian interpolacyjny Lagrange'a.*

Warto zauważyć, że wielomian w jest określony jednoznacznie, tzn. jeśli wielomian n-tego stopnia $\overline{w}$ spełnia również warunek (26), to jest identyczny z w; bowiem ich różnica jest wielomianem stopnia nie większego od n znikającym w $n+1$ punktach (mianowicie w punktach x_0, $x_1, \dots, x_n$).

Gdy funkcja wyrażająca zależność między jakimiś wielkościami fizycznymi znana nam jest jedynie empirycznie, mianowicie znana jest skończona ilość wartości tej funkcji (na podstawie pomiarów) — stosuje się przybliżone obliczenie całki tej funkcji: stosuje się np. interpolację Lagrange'a i oblicza się całkę otrzymanego wielomianu interpolacyjnego.

Szczególnie prosty wzór otrzymujemy, gdy $n = 2$ oraz $x_0 = a$, $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $x_2 = b$, tj. gdy przez dane trzy punkty przeciągamy parabolę. Jak łatwo obliczyć, otrzymujemy

$$\int_a^b w(x)\,dx = \tfrac{1}{6}(b-a)(y_0+4y_1+y_2). \tag{28}$$

Jest to *wzór Simpsona*, dający przybliżoną wartość na $\int_a^b f(x)dx$. Dokładność obliczenia możemy zwiększyć, dzieląc przedział ab na mniejsze przedziały i stosując do każdego z nich z osobna wzór Simpsona. Mianowicie, dzieląc przedział ab na $2n$ równych przedziałów za pomocą punktów $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$, gdzie $x_0 = a$, $x_{2n} = b$, otrzymujemy *ogólny wzór Simpsona* na przybliżoną wartość całki

$$\frac{b-a}{6n}\big(y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1})\big).$$

PRZYKŁAD. Zastosujmy wzór Simpsona do obliczenia

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

dzieląc odcinek $1 \leqslant x \leqslant 2$ na połowy. Mamy więc

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \; x_1 = 1{,}5, \; y_1 = 0{,}667\ldots, \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 0{,}5.$$

A zatem wzór (28) daje przybliżoną wartość na log2

$$\tfrac{1}{6}(1 + 4 \cdot 0{,}667 + 0{,}5) = 0{,}694\ldots$$

W rzeczywistości $\log 2 = 0{,}6931\ldots$

Uwaga. Spośród innych metod przybliżonego obliczania całki oznaczonej wymienimy tu tzw. *metodę trapezów*. Polega ona na następującym postępowaniu:

Dzielimy przedział ab na n równych przedziałów za pomocą punktów $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, gdzie $x_0 = a$, $x_n = b$ i prowadzimy łamaną przez punkty (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$ (por. rys. 10). Powierzchnia s_n zawarta między tą łamaną a osią X jest sumą powierzchni n trapezów $T_1, \ldots, T_n$, gdzie powierzchnia trapezu T_k jest równa $\dfrac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)$. A więc

$$s_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Jest to przybliżona wartość powierzchni między krzywą $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, a osią X; inaczej mówiąc jest to przybliżona wartość całki $\int_a^b f(x)\,dx$.

10.9. Wzór Wallisa.

Udowodnimy następujący *wzór Wallisa*:

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2. \tag{29}$$

Oprzemy się w tym celu na udowodnionych w przykładzie 5, § 10.1, wzorach

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

Ze wzorów tych wynika

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx : \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx\right). \tag{30}$$

---

(1) J. Wallis (1616-1703) — matematyk angielski.

Udowodnimy, że

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx : \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx\right) = 1.$$

Istotnie, w przedziale $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ zachodzą nierówności

$$0 \leqslant \sin^{2n+1}x \leqslant \sin^{2n}x \leqslant \sin^{2n-1}x,$$

skąd

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx,$$

a więc

$$1 \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx : \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\,dx : \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx \leqslant \frac{2n+1}{2n} = 1+\frac{1}{2n}.$$

W granicy więc rozważany stosunek całek dąży do 1.

Wnosimy stąd na podstawie (30), że

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2\frac{1}{2n+1}\right]. \tag{31}$$

Wzór ten natychmiast daje wzór (29), ponieważ $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Uwaga 1. Wzór Wallisa stosujemy również w następującej postaci:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n=\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n}\,(2n)!}. \tag{32}$$

Mamy bowiem

$$2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n = n!\cdot 2^n,$$

$$1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}.$$

Podstawiając powyższe wzory we wzór (29) i wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy równość (32).

Uwaga 2. Wzór Wallisa można też zapisać w postaci iloczynu nieskończonego

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots \tag{33}$$

Oznaczając bowiem przez p_n iloczyn częściowy

$$p_n = \frac{4\cdot 1^2}{4\cdot 1^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4n^2}{4n^2-1} = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\ldots\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2\frac{1}{2n+1},$$

mamy, zgodnie z (31), $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \pi/2$. Zarazem

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1},$$

skąd wzór (33).

10.10. Wzór Stirlinga(1). Ze wzoru Wallisa wyprowadzimy następujący *wzór Stirlinga:*

(34) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}} = 1.$$

Przyjmijmy

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

Należy więc dowieść, że $\lim a_n = \sqrt{2\pi}$.

Udowodnimy najpierw, że ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest zbieżny. Ponieważ jest to ciąg o wyrazach dodatnich, wystarczy dowieść, że ciąg ten jest malejący, tj. że $a_n/a_{n+1} > 1$. Otóż

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\cdot\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

skąd

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

Ponieważ zaś (por. (54), § 7.11)

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\log(1+x) > 1$$

dla $0 < x \leqslant 1$, więc podstawiając $x = 1/n$, znajdujemy

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1, \quad \text{czyli} \quad \log\frac{a_n}{a_{n+1}} > 0, \quad \text{skąd} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.$$

Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest więc zbieżny. Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Udowodnimy, że $g \neq 0$. W tym celu zauważmy, że

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_n^{n+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

(1) J. Stirling (1692-1770) — znany matematyk szkocki.

bo łuk hiperboli $y = 1/x$, $n \leqslant x \leqslant n+1$, leży poniżej odcinka łączącego punkty $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ i $\left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$. Stąd

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

a więc

$$\log\frac{a_1}{a_n} < \frac{1}{4}, \quad \text{tzn.} \quad a_n > e^{3/4}.$$

Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że $g = \sqrt{2\pi}$. Zastosujemy w tym celu wzór (32), biorąc pod uwagę, że

$$a_n^2 = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n} n} \quad \text{oraz} \quad a_{2n} = \frac{(2n)!\, e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}.$$

Otrzymujemy

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{g^2}{g\sqrt{2}}, \quad \text{więc} \quad g = \sqrt{2\pi}.$$

Uwaga. Znaczenie praktyczne wzoru Stirlinga polega na tym, że dla dużych n wyrażenie $\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ daje przybliżoną wartość na $n!$ Mówimy, że jest to *wartość asymptotyczna* $n!$ (rozumiejąc przez to, że stosunek tych dwóch wyrażeń dąży do 1).

10.11*. Całka Riemanna. Całki Darboux, górna i dolna. Twierdzenia § 10.3 stanowią punkt wyjścia do uogólnienia pojęcia całki oznaczonej na pewne kategorie funkcji nieciągłych. Wprowadzimy w tym celu całki Darboux.

Niech dana będzie funkcja f w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, ograniczona (lecz niekoniecznie ciągła). Niech dany będzie ciąg podziałów przedziału ab na 2^n równych części ($n = 0, 1, \ldots$). Oznaczmy punkty n-tego podziału przez

$$a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,2^n}, \quad \text{przy czym} \quad a = a_{n,0},\ a_{n,2^n} = b.$$

Niech $M_{n,k}$ oznacza kres górny funkcji f w przedziale $a_{n,k-1}a_{n,k}$. Niech wreszcie

$$S_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}. \tag{35}$$

Ciąg $\{S_n\}$ jest ciągiem malejącym (w szerszym sensie). Istotnie, dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ przedziały $a_{n+1,2k-2}a_{n+1,2k-1}$ oraz $a_{n+1,2k-1}a_{n+1,2k}$ są zawarte w przedziale $a_{n,k-1}a_{n,k}$. A zatem

$$M_{n+1,2k-1} \leqslant M_{n,k} \quad \text{oraz} \quad M_{n+1,2k} \leqslant M_{n,k},$$

to znaczy

$$\tfrac{1}{2}(M_{n+1,2k-1}+M_{n+1,2k}) \leqslant M_{n,k}.$$

Stąd

$$S_{n+1} = \frac{b-a}{2^n}\left(\frac{M_{n+1,0}+M_{n+1,1}}{2}+\ldots+\frac{M_{n+1,2^{n+1}-1}+M_{n+1,2^{n+1}}}{2}\right) \leqslant S_n.$$

Ciąg $\{S_n\}$ jest więc nierosnący. Zarazem jest to ciąg ograniczony, oznaczając bowiem przez m kres dolny funkcji f, mamy oczywiście $S_n \geqslant m(b-a)$. Ciąg ten jest więc zbieżny. Granicę jego nazywamy *górną całką Darboux* i oznaczamy symbolem

$$(36) \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} S_n.$$

Podobnie: oznaczając przez $m_{n,k}$ kres dolny funkcji f w przedziale $a_{n,k-1}a_{n,k}$ i przyjmując

$$(37) \qquad s_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k},$$

dowodzimy, że ciąg $\{s_n\}$ jest rosnący (w szerszym sensie) i ograniczony, a zatem zbieżny. Granicę jego nazywamy *dolną całką Darboux* i oznaczamy symbolem

$$(38) \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Jeżeli całki górna i dolna funkcji f są sobie równe, to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna*; wspólną wartość tych całek nazywamy *całką Riemanna funkcji* f i oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$, jak w wypadku całki oznaczonej funkcji ciągłej. Możemy posługiwać się tym samym znakowaniem, ponieważ — jak wynika natychmiast z twierdzenia 2, § 10.3 — *całka Riemanna funkcji ciągłej pokrywa się z całką oznaczoną tej funkcji* (w sensie definicji podanej w § 10.1).

Funkcje całkowalne w sensie Riemanna obejmują obszerniejszą klasę niż funkcje ciągłe. W szczególności funkcje ograniczone o skończonej ilości punktów nieciągłości (do których zresztą powrócimy w § 11) oraz funkcje monotoniczne są całkowalne. Istnieją jednak funkcje (ograniczone) niecałkowalne w sensie Riemanna; taką jest np. znana nam już funkcja Dirichleta (por. § 4,5) równa 1 w punktach wymiernych, a 0 w niewymiernych; dla funkcji tej mamy stale $S_n = 1$ i $s_n = 0$, a więc

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0.$$

Dodajmy, że istnieje definicja całki (Lebesgue'a), która przypisuje całkę obszerniejszej klasie funkcji aniżeli całka Riemanna [1].

Definicję całek Darboux oparliśmy na rozważaniu ciągu podziałów „dwójkowych” przedziału całkowania. Wykażemy obecnie, że do tego samego wyniku dochodzi się rozważając dowolny ciąg normalny podziałów. Ściślej mówiąc, udowodnimy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE. *Niech dany będzie normalny ciąg podziałów odcinka ab wyznaczony przez punkty*

$$(39)\qquad a'_{n,0} < a'_{n,1} < \ldots < a'_{n,l_n}, \quad \textit{przy czym} \quad a'_{n,0} = a,\ a'_{n,l_n} = b.$$

Niech $M'_{n,k}$ oznacza kres górny funkcji f w przedziale $a'_{n,k-1}a'_{n,k}$ i niech

$$(40)\qquad S'_n = \sum_{k=1}^{l_n} M'_{n,k}(a'_{n,k} - a'_{n,k-1}).$$

Wówczas

$$(41)\qquad \lim_{n=\infty} S'_n = \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx.$$

Dowód tego twierdzenia oprzemy na następującym lemacie:

LEMAT. *Niech dane będą dwa podziały przedziału ab:*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b \quad \textit{oraz} \quad a = a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{r'} = b.$$

Niech d i d' oznaczają odpowiednio długość największego przedziału pierwszego, względnie drugiego podziału. Niech M_k i M'_k oznaczają kres górny funkcji f w przedziale $a_{k-1}a_k$, względnie w przedziale $a'_{k-1}a'_k$ i niech

$$(42)\qquad S = \sum_{k=1}^{r} M_k(a_k - a_{k-1}) \quad \textit{oraz} \quad S' = \sum_{k=1}^{r'} M'_k(a'_k - a'_{k-1}).$$

Niech wreszcie liczba M spełnia nierówność $M > |f(x)|$ dla każdego x z przedziału ab.

Wówczas zachodzi zależność

$$(43)\qquad S' \leqslant S + 3rMd'.$$

Przedziały drugiego podziału można rozklasyfikować na $r+1$ klas, zaliczając dany przedział do klasy k-tej (dla $k = 1, 2, \ldots, r$) wtedy, gdy mieści się w przedziale $a_{k-1}a_k$, a do klasy $(r+1)$-szej, gdy nie mieści się w żadnym z przedziałów pierwszego podziału, tj. gdy zawiera wewnątrz któryś z punktów $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$. Rzecz jasna, że niektóre z tych klas mogą być puste.

---

[1] Por. S. Saks, *Zarys teorii całki*, Warszawa 1930, lub obszerniejsze wydanie angielskie w Monografiach Matematycznych, t. 7, Warszawa 1937.

Jeśli klasa k-ta (dla $k \leqslant r$) jest niepusta, to niech p_k oznacza pierwszy, a j_k ostatni ze wskaźników i spełniających warunek $a_{k-1} \leqslant a'_i \leqslant a_k$. Ponieważ dla przedziałów $a'_{i-1}a'_i$ k-tej klasy zachodzi nierówność $M'_i \leqslant M_k$, przeto oznaczając przez Σ^k sumę rozciągniętą na przedziały k-tej klasy, mamy

$$\begin{aligned}\Sigma^k M'_i(a'_i - a'_{i-1}) &\leqslant M_k \Sigma^k (a'_i - a'_{i-1}) = M_k(a'_{j_k} - a'_{p_k}) = \\ &= M_k(a_k - a_{k-1}) - M_k(a'_{p_k} - a_{k-1}) - M_k(a_k - a'_{j_k}) \leqslant \\ &\leqslant M_k(a_k - a_{k-1}) + M(a'_{p_k} - a_{k-1}) + M(a_k - a'_{j_k}) \leqslant \\ &\leqslant M_k(a_k - a_{k-1}) + 2Md'.\end{aligned}$$

Jeżeli klasa k-ta jest pusta, to niech $\Sigma^k = 0$. Zauważmy wreszcie, że przedziałów klasy $(r+1)$-szej jest co najwyżej $r-1$. A zatem

$$\Sigma^{r+1} M'_i(a'_i - a'_{i-1}) \leqslant (r-1)Md'.$$

W rezultacie

$$\begin{aligned}S' &= \Sigma^1 M'_i(a'_i - a'_{i-1}) + \ldots + \Sigma^r M'_i(a'_i - a'_{i-1}) + \Sigma^{r+1} M'_i(a'_i - a'_{i-1}) \leqslant \\ &\leqslant M_1(a_1 - a_0) + \ldots + M_r(a_r - a_{r-1}) + 2rMd' + (r-1)Md',\end{aligned}$$

skąd wzór (43).

W ten sposób lemat nasz jest udowodniony.

Aby udowodnić twierdzenie, weźmy pod uwagę $\varepsilon > 0$ i dobierzmy taki wskaźnik q, aby $S_q < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$. Ponieważ rozważany ciąg podziałów jest normalny, przeto dla dostatecznie dużych n mamy $d'_n < \varepsilon/3 \cdot 2^q M$. W myśl lematu mamy więc

$$S'_n \leqslant S_q + 3 \cdot 2^q M d'_n < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + 2\varepsilon.$$

Zarazem przyporządkujmy każdemu n taki wskaźnik j_n, ażeby spełniona była nierówność

$$\frac{b-a}{2^{j_n}} < \frac{\varepsilon}{3l_n M}.$$

Wówczas

$$S_{j_n} \leqslant S'_n + 3l_n M \frac{b-a}{2^{j_n}} < S'_n + \varepsilon,$$

skąd

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < S'_n + \varepsilon, \qquad \text{bo} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < S_{j_n}.$$

W rezultacie

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < S'_n + \varepsilon < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + 3\varepsilon.$$

Ze względu na to, że ε jest dowolną liczbą dodatnią, nierówność ta pociąga za sobą wzór (41).

Twierdzenie nasze jest więc udowodnione. Analogiczne twierdzenie dotyczy całki dolnej.

Ważną konsekwencją naszego twierdzenia jest następujący wzór:

$$(44)\qquad \begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx, \\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx &= \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

o ile $a < c < b$.

Istotnie, podzielmy odcinki ac i cb na 2^n równych części. Oznaczmy punkty podziału przez

$$(45)\qquad a = a_{n,0} < a_{n,1} < \ldots < a_{n,2^n} = c = b_{n,0} < b_{n,1} < \ldots < b_{n,2^n} = b.$$

Niech $M_{n,k}$ oznacza kres górny funkcji f w przedziale $a_{n,k-1}a_{n,k}$, a $P_{n,k}$ kres górny w przedziale $b_{n,k-1}b_{n,k}$. Mamy więc

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}(a_{n,k} - a_{n,k-1})$$

oraz

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{2^n} P_{n,k}(b_{n,k} - b_{n,k-1}).$$

Zarazem

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}(a_{n,k} - a_{n,k-1}) + \sum_{k=1}^{2^n} P_{n,k}(b_{n,k} - b_{n,k-1}) \right\},$$

punkty (45) wyznaczają bowiem normalny ciąg podziałów odcinka ab. Stąd pierwszy ze wzorów (44). Dowód drugiego jest analogiczny.

Ze wzorów (44) wynika, że jeśli funkcja f jest całkowalna w przedziałach ac i cb (gdzie $a < c < b$), to jest też całkowalna w przedziale ab i zachodzi przy tym wzór z twierdzenia 5, § 10.2 (o podziale przedziału całkowania).

Odwrotnie, jeśli funkcja jest całkowalna w przedziale ab, to jest też całkowalna w każdym z przedziałów ac i cb (a zatem i w każdym przedziale zawartym w ab).

Istotnie, z założenia:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Zestawiając tę podwójną równość ze wzorami (44), otrzymujemy

$$\Big(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx\Big) + \Big(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\Big) = 0.$$

Stąd na mocy oczywistych nierówności

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^c} f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_c^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

wnosimy, że

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx \quad \text{oraz} \quad \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Podobnie jak dla funkcji ciągłych, przyjmujemy dla dowolnych funkcji całkowalnych wzory (6) i (7) i dowodzimy twierdzeń 1, 2, 6, 7 i 8, § 10.2. Zamiast wzoru na wartość średnią mamy dla dowolnych funkcji całkowalnych podwójną nierówność

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a), \tag{46}$$

gdzie $a < b$ i gdzie M i m oznaczają kresy górny i dolny funkcji f w przedziale ab.

Dla dowolnych funkcji całkowalnych nie zachodzi twierdzenie 10, § 10.2, o różniczkowalności funkcji $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Można jednak udowodnić, że *funkcja* $g(x)$ *jest ciągła*.

Istotnie, oznaczając przez M kres górny funkcji $|f(x)|$ w przedziale ab, mamy (na mocy wzorów (44) i (46))

$$|g(x+h)-g(x)| = \Big|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big| = \Big|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\Big| \leqslant |h|\cdot M,$$

skąd $\lim\limits_{h=0} g(x+h) = g(x)$.

Zadania

1. Dowieść, że

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,dx.$$

2. Obliczyć sumę $\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \ldots \pm \frac{1}{2n+1}\binom{n}{n}$.

Wskazówka. Zastosować do całki $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx$ podstawienie $x = \cos t$.

3. Wyprowadzić wzór (*wzór Cavalieriego*)

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

posługując się całką $\int\limits_0^1 x^m dx$ (por. też zadania 2 i 3, § 1).

4. Obliczyć

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

$\left(\text{całkując funkcję } \dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

5. Dowieść, że $\lim\limits_{n=\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) = \log 2$.

6. Podać interpretację geometryczną stałej Eulera (por. zad. 18, § 7)

$$\gamma = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

opierając się na równości $\int\limits_1^n \dfrac{dx}{x} = \log n$.

7. Dowieść, że $\int\limits_0^\pi \dfrac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Wskazówka. Rozłożyć przedział całkowania na połowy i w drugiej całce podstawić $x = \pi - t$.

8. Dowieść, że $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\pi \log 2$.

Wskazówka. Dowieść najpierw, że

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \frac{\sin 2x}{2}\, dx.$$

9. Znaleźć długość łuku paraboli o równaniu $y = x^2$ zawartego między punktami o odciętych 0 i a.

10. Dana jest elipsa o mimośrodzie e i o większej osi o długości 2. Wyrazić jej obwód przez szereg potęgowy względem e.

11. Koło o równaniu $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ położone na płaszczyźnie XY dokonywa obrotu (w przestrzeni) dokoła osi Y. Obliczyć pole powierzchni otrzymanej w ten sposób bryły, tzw. *torusa* (przyjmujemy $a > r$).

12. Obliczyć pole wspólnej części koła o promieniu r i współśrodkowej z nim elipsy o osiach a i b.

13. Obliczyć $\frac{1}{4}\pi$ z dokładnością do 5 znaków dziesiętnych, stosując wzór Simpsona do całki $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$.

14. Wykazać, że wzór (28) Simpsona daje pole z dokładnością do $\frac{1}{576}M(b-a)^4$, gdzie M oznacza kres górny $|f'''(x)|$ w przedziale $a < x < b$.

Wskazówka. Aby to wykazać, wprowadzić funkcję pomocniczą

$$g(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,dx - \frac{t}{3}\big(f(c-t)+4f(c)+f(c+t)\big), \quad \text{gdzie} \quad c = \frac{a+b}{2},$$

i wyprowadzić nierówność

$$-\frac{|t|}{3}2M < g'''(t) < \frac{|t|}{3}2M.$$

Przez całkowanie tej nierówności dojść do żądanego wyniku.

15. Udowodnić *nierówność Schwarza* dla całek

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 < \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Wskazówka. Skorzystać z nierówności

$$\int_a^b \big(f(x)+cg(x)\big)^2\,dx > 0,$$

która zachodzi dla każdego c.

16. Podać wzór na promień krzywizny w punkcie (x, y) dla następujących krzywych:

1) hiperboli $xy = 1$, 2) elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$,

3) paraboli $y = 4px^2$, 4) hipocykloidy $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$,

5) krzywej $y = x^3$.

17. Wyznaczyć punkt na krzywej wykładniczej $y = e^x$, w którym krzywizna jest największa.

18. Dana jest hipocykloida z zadania 16. Obliczyć jej długość, pole obszaru przez nią ograniczonego, objętość i powierzchnię figury obrotowej, otrzymanej przez jej obrót dokoła osi X.

19. Układ funkcji $f_1, \ldots, f_n$ nazywamy *liniowo niezależnym*, jeśli nie istnieje układ n stałych $c_1, \ldots, c_n$ (z wyjątkiem układu złożonego z n zer) taki, aby równość

$$c_1f_1(x)+\ldots+c_nf_n(x) = 0$$

zachodziła przy wszelkiej wartości x.

Udowodnić, że na to, aby układ n funkcji $f_1, \ldots, f_n$ ciągłych w przedziale ab był liniowo niezależny, potrzeba i wystarcza, aby zachodziła nierówność

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

gdzie $a_{km} = \int_a^b f_k(x)f_m(x)\,dx$.

Wskazówka. Skorzystać z warunków rozwiązalności układu n równań

$$a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

o n niewiadomych.

20. Układ skończony lub nieskończony funkcji $f_1, f_2, \ldots$ nazywamy *ortogonalnym*, jeśli spełnione są warunki (w rozważanym przedziale ab):

$$\int_a^b f_k(x) f_m(x)\, dx \begin{cases} = 0 & \text{dla} \quad k \neq m, \\ \neq 0 & \text{dla} \quad k = m. \end{cases}$$

Podać przykłady układów ortogonalnych w obrębie funkcji trygonometrycznych.

21*. Udowodnić, że wielomiany (tzw. *wielomiany Legendre'a* [1]) określone przez wzór

$$w_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

tworzą w przedziale -1, $+1$ układ ortogonalny.

Wskazówka. Udowodnić najpierw, że jeśli $m < n$, to $\int_{-1}^{+1} w_n(x) \cdot x^m dx = 0$.

§ 11. Całki niewłaściwe i ich związek z szeregami nieskończonymi

11.1. Całki o nieograniczonym przedziale całkowania. Niech dana będzie funkcja ciągła f w przedziale nieskończonym $x \geqslant a$. Wówczas dla każdego $x \geqslant a$ istnieje całka $\int_a^x f(z)\, dz$. Jeżeli istnieje

$$\lim_{x=\infty} F(x), \qquad \text{gdzie} \qquad F(x) = \int_a^x f(z)\, dz,$$

to granicę tę oznaczamy symbolem $\int_a^\infty f(x)\, dx$ i nazywamy *całką niewłaściwą funkcji f od a do* ∞. Przy założeniu, że granica ta istnieje, mamy więc

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(z)\, dz. \tag{1}$$

Mówimy też w tym wypadku, że całka niewłaściwa jest *zbieżna*.

Jeżeli $\lim_{x=\infty} \int_a^x f(z)\, dz = \infty$ (lub $-\infty$), to piszemy $\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty$ (lub $-\infty$); mówimy wówczas, że całka jest *rozbieżna* do $+\infty$ lub $-\infty$.

Analogicznie określamy

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{x=-\infty} \int_x^a f(z)\, dz, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\, dx + \int_0^\infty f(x)\, dx. \tag{2}$$

Na mocy definicji

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{x=\infty} \big(F(x) - F(a)\big) = \lim_{x=\infty} F(x) - F(a),$$

gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f.

[1] A. Legendre (1752-1833) — wielki analityk francuski.

Na przykład,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1.$$

Całka ta jest więc zbieżna. Ogólniej: dla $s > 1$ zbieżna jest całka

(3) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{s-1}.$$

Natomiast dla $s = 1$ otrzymujemy całkę rozbieżną do ∞

(4) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\log x]_1^\infty = \infty.$$

Przykładem całki nie posiadającej ani skończonej, ani nieskończonej granicy jest $\int_a^\infty \sin x\,dx$. Nie istnieje bowiem $\lim_{x=\infty} \cos x$.

W tym ostatnim przykładzie istotne jest to, że funkcja podcałkowa przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Zachodzi bowiem twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \geqslant a$, to całka $\int_a^\infty f(x)dx$ ma bądź wartość skończoną, bądź nieskończoną (w zależności od tego czy funkcja $F(x) = \int_a^x f(z)dz$ jest ograniczona, czy nieograniczona w promieniu $x \geqslant a$).*

Istotnie, funkcja $F(x)$ jako funkcja niemalejąca posiada granicę $\lim_{x=\infty} F(x)$ skończoną lub nieskończoną, w zależności od tego czy funkcja ta jest ograniczona, czy niegraniczona (por. tw. 1, § 4.7).

Twierdzenie 4' z § 4.7 pociąga za sobą natychmiast następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2. *Na to, żeby całka $\int_a^\infty f(x)dx$ była zbieżna (do granicy skończonej), potrzeba i wystarcza, aby do każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie r, że warunki $x > r$ i $x' > r$ pociągają za sobą nierówność*

$$\left|\int_{x'}^{x} f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

Istnienie bowiem granicy $\lim_{x=\infty} F(x)$ równoważne jest istnieniu dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ takiej liczby r, że $|F(x)-F(x')| < \varepsilon$, o ile tylko $x > r$ oraz $x' > r$. Ponieważ zaś

$$F(x)-F(x') = \int_{x'}^{x} f(z)dz, \quad \text{przeto} \quad \left|\int_{x'}^{x} f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

Geometrycznie całkę $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ interpretujemy podobnie jak całkę w granicach skończonych: jeśli $f(x) \geqslant 0$, całka ta oznacza pole obszaru nieograniczonego złożonego z punktów (x, y) takich, że $x \geqslant a$ i $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

11.2. Całki funkcji nieokreślonych w jednym punkcie. Niech dana będzie funkcja ciągła f w przedziale $a \leqslant x < b$ (przedział pozbawiony punktu b). Dla każdego x spełniającego powyższy warunek istnieje więc całka oznaczona $\int\limits_a^x f(z)\,dz$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x\to b-0} F(x), \qquad \text{gdzie} \qquad F(x) = \int\limits_a^x f(z)\,dz,$$

to granicę oznaczamy symbolem $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, jak w wypadku rozważanym w poprzednim paragrafie, mianowicie gdy funkcja jest określona i ciągła w całym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ (wraz z końcami). W tym ostatnim wypadku definicja podana w § 10 (wzór (1)) jest zgodna z definicją symbolu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ obecnie podaną. Inaczej mówiąc: *jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$, to całka* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (w sensie definicji z § 10, wzór (1)) *spełnia warunek*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-0} F(x), \qquad \text{gdzie} \qquad F(x) = \int\limits_a^x f(z)\,dz. \tag{5}$$

Równość ta bowiem oznacza, że $F(b) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x)$, tzn. że funkcja F jest ciągła w punkcie b (lewostronnie); to zaś wynika z twierdzenia 10, § 10.2 (uwaga 2).

Całkę funkcji określonej w przedziale $a \leqslant x < b$ nazywamy *całką niewłaściwą* (drugiego rodzaju). Jeśli ta całka istnieje, tj. jeśli istnieje $\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$, to mówimy, że całka jest *zbieżna*.

Jeżeli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale $a < x \leqslant b$, to całkę $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ określamy analogicznie

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a+0} \int\limits_x^b f(z)\,dz.$$

Ogólniej, jeśli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale otwartym $a < x < b$ i jeśli zbieżne są całki niewłaściwe $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ i $\int\limits_c^b f(x)\,dx$, gdzie c jest dowolnym punktem przedziału $a < x < b$, to przez całkę $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ rozumiemy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Łatwo się przekonać, że suma ta nie zależy od wyboru punktu c.

Jeszcze ogólniej: jeżeli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ *poza skończoną ilością punktów* (w których jest nieciągła lub nieokreślona), to przez całkę (niewłaściwą) funkcji f w tym przedziale rozumiemy sumę

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx, \tag{7}$$

gdzie $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, przy czym układ tych punktów obejmuje wszystkie punkty, w których funkcja f jest nieokreślona lub nieciągła.

Całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jest więc zbieżna, jeśli wszystkie całki występujące po prawej stronie wzoru (7) są zbieżne.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli funkcja f jest ograniczona i poza skończoną ilością punktów przedziału ab jest określona i ciągła, to jej całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna.*

Ze względu na wzory (6) i (7) wystarczy twierdzenie to udowodnić dla szczególnego wypadku, gdy funkcja f jest określona i ciągła dla $a \leqslant x < b$.

Zauważmy w tym celu, że na zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju istnieje warunek konieczny i dostateczny, analogiczny do warunku podanego dla całek niewłaściwych pierwszego rodzaju (por. tw. 2, § 11.1).

TWIERDZENIE 2. *Na to, żeby całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ funkcji określonej i ciągłej dla $a \leqslant x < b$ była zbieżna, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że warunki $0 < b - x < \delta$ i $0 < b - x' < \delta$ pociągają za sobą nierówność*

$$\left| \int\limits_{x'}^{x} f(z)\,dz \right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Istotnie, oznaczając $F(x) = \int\limits_a^x f(z)\,dz$, wnioskujemy z twierdzenia 4, § 4.7, że istnienie granicy $\lim\limits_{x \to b-0} F(x)$ równoważne jest nierówności $|F(x) - F(x')| <$

$< \varepsilon$ (gdy x i x' spełniają wymienione warunki). Lecz

$$F(x)-F(x') = \int_{x'}^{x} f(z)\,dz,$$

skąd wzór (8).

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia 1. Należy więc dla danego $\varepsilon > 0$ znaleźć takie $\delta > 0$, żeby warunki $0 < b-x < \delta$ i $0 < b-x' < \delta$ pociągały za sobą nierówność (8).

Z założenia funkcja f jest ograniczona w przedziale $a \leqslant x < b$. Istnieje więc taka liczba M, że $M > |f(x)|$ dla każdego x rozważanego przedziału. Przyjmijmy $\delta = \varepsilon/M$. Otóż

$$\Big|\int_{x'}^{x} f(z)\,dz\Big| < |x-x'|M,$$

a z nierówności $0 < b-x < \delta$ i $0 < b-x' < \delta$ wynika, że $|x-x'| < \delta = \varepsilon/M$, skąd żądany wzór (8).

Twierdzenie 1 jest w ten sposób udowodnione. Pojęcie całki niewłaściwej pozwala więc na uogólnienie pojęcia całki oznaczonej na funkcje ograniczone, posiadające skończoną ilość punktów nieciągłości.

Przykład 1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}[x^{1-s}]_0^1 = \frac{1}{1-s}$ dla $s < 1$. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$.

Przykład 2. $\int_0^1 \sin(1/x)\,dx$ istnieje na mocy twierdzenia 1, funkcja podcałkowa bowiem jest ciągła i ograniczona dla $0 < x \leqslant 1$.

Przykład 3. Podobnie istnieje całka $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$. W tym wypadku uważamy całkę za *pozornie niewłaściwą*; wprawdzie funkcja podcałkowa nie jest określona w punkcie 0, posiada jednak w tym punkcie granicę; przyjmując tę granicę za wartość funkcji podcałkowej w punkcie 0, mamy do czynienia z całką oznaczoną (funkcji ciągłej) w zwykłym sensie.

Przykład 4. Analizując definicję całki (niewłaściwej) funkcji f ciągłej i określonej w przedziale otwartym $a < x < b$ widzimy, że całkę tę można określić jako różnicę $F(b)-F(a)$, gdzie F jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$ i spełniającą warunek $F'(x) = f(x)$ w przedziale otwartym $a < x < b$ (oczywiście o ile taka funkcja F istnieje).

Na przykład całka $\int_{-r}^{r} \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$ wyrażająca długość półokręgu o promieniu r jest całką niewłaściwą (mianownik funkcji podcałkowej znika w końcach przedziału całkowania). Ponieważ jednak funkcja pierwotna funkcji podcałkowej, tj. $F(x) = -r\arccos(x/r)$ jest ciągła w całym przedziale $-r \leqslant x \leqslant r$, wartość rozważanej całki wyraża się (podobnie jak w przykładzie rozpatrywanym w § 10.5) przez różnicę $F(r) - F(-r) = \pi r$.

Uwaga. *Całka niewłaściwa funkcji ograniczonej i ciągłej poza skończoną ilością punktów jest identyczna z całką Riemanna tej funkcji.* Ze względu na twierdzenie o podziale przedziału całkowania, dowód redukuje się do przypadku, gdy funkcja f jest ciągła w przedziale $a \leqslant x < b$. Ze względu zaś na ciągłość całki Riemanna traktowanej jako funkcji górnej granicy całkowania (por. § 10.11) i całkowalności funkcji f w sensie Riemanna w przedziale ab równa się

$$\lim_{x=b-0} \int_a^x f(x)\,dx, \qquad \text{czyli równa się} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

(symbole $\int_a^x$ i $\int_a^b$ użyte są tu w sensie definicji z §§ 10.1 i 11.2).

11.3. Wzory rachunkowe. Niech funkcje f i g będą ciągłe i określone dla $a \leqslant x < b$, przy czym b może oznaczać ∞. Załóżmy, że całki (niewłaściwe pierwszego lub drugiego rodzaju) $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ są zbieżne. Twierdzenia 1 i 2 z § 10.2 pozostają wówczas w mocy. Bowiem

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \lim_{x=b} \int_a^x \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \lim_{x=b} \int_a^x f(x)\,dx \pm \lim_{x=b} \int_a^x g(x)\,dx =$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Analogicznie dowodzi się, że zachodzi twierdzenie 2 z § 10.2.

Wzór na całkowanie przez części (tw. 3, § 10.2) również pozostaje w mocy, gdy przyjąć, że $f(b)g(b)$ oznacza $\lim\limits_{x=b} f(x)g(x)$.

Podobnie, jeśli przez $f(b)$ oznaczyć $\lim\limits_{x=b} f(x)$ (przy czym zarówno b jak i $f(b)$ mogą być równe ∞), to zachodzi twierdzenie 4 na całkowanie przez podstawienie. Przy założeniu zbieżności całki $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$ mamy bowiem

$$\int_a^b g\big(f(x)\big)f'(x)\,dx = \lim_{x=b} \int_a^x g\big(f(x)\big)f'(x)\,dx = \lim_{x=b} \int_{f(a)}^{f(x)} g(y)\,dy =$$
$$= \lim_{y=f(b)} \int_{f(a)}^{y} g(y)\,dy = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

ze względu na ciągłość całki traktowanej jako funkcja górnej granicy całkowania (tw. 10, § 10.2).

Jeżeli założyć ścisłą monotoniczność funkcji f, to zbieżność całki $\int\limits_a^b g(f(x))f'(x)dx$ pociąga za sobą zbieżność całki $\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$. Poprzednio udowodniona zależność daje się więc odwrócić; ze względu bowiem na równość $\lim\limits_{y\to f(b)} h(y) = b$, gdzie $h(y)$ oznacza funkcję odwrotną względem $f(x)$, poprzednie rozumowanie daje się przeprowadzić również w odwrotnym kierunku.

Inne wzory rachunkowe: wzór z twierdzenia 5 o podziale przedziału całkowania oraz wzory z twierdzeń 6-8, § 10.2, również z łatwością dają się uogólnić na całki niewłaściwe.

Uwaga. Niech funkcja f będzie przedziałami ciągła w przedziale ab. Znaczy to (por. § 5.1), że istnieje taki układ punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \quad \text{gdzie} \quad a_0 = a \text{ i } a_n = b,$$

że funkcja f_k określona przez warunki

$$f_k(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad a_{k-1} < x < a_k,$$

$$f_k(a_{k-1}) = f(a_{k-1}+0) \quad \text{i} \quad f_k(a_k) = f(a_k-0)$$

jest ciągła w całym przedziale $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Mamy wówczas

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x)dx.$$

Opierając się na tej równości i biorąc pod uwagę, że $\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x)dx$ jest całką właściwą, z łatwością stwierdzamy, że wzór na całkę sumy pozostaje w mocy, jeśli funkcje f i g są przedziałami ciągłe oraz że wzór na całkowanie przez podstawienie obowiązuje przy założeniu, że funkcje $g(f(x))$ i $f'(x)$ są przedziałami ciągłe.

11.4. Przykłady.

Przykład 1. Aby obliczyć całkę $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, podstawiamy $x = \operatorname{tg} t$. Ponieważ $\operatorname{tg} 0 = 0$ oraz $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg} t = \infty$, przeto

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n} t \frac{d\operatorname{tg} t}{dt} dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2n-2} t\, dt =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{dla} \quad n > 1$$

(por. przykład 5, § 10.1). Tę samą całkę obliczyć można stosując wzór rekurencyjny (przykład 12, § 9.3)

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

i biorąc pod uwagę, że

$$\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]_0^\infty = 0, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Przykład 2. Aby udowodnić zbieżność całki $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, zastosujemy drugie twierdzenie o wartości średniej (§ 10.7), biorąc pod uwagę, że funkcja $1/x$ jest malejąca. Otrzymujemy

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\,dx + \frac{1}{b}\int_\xi^b \sin x\,dx.$$

Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Należy określić takie r, żeby warunki $b > a > r$ pociągały za sobą (tw. 2, § 11.1)

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon.$$

Otóż

$$\left|\int_u^v \sin x\,dx\right| \leqslant 2, \quad \text{a więc} \quad \left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) < \frac{4}{a} < \frac{4}{r}.$$

Wystarczy zatem przyjąć $r = 4/\varepsilon$.

Zauważmy jeszcze, że

(9) $$\lim_{n=\infty}\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (a > 0).$$

Podstawmy bowiem $y = nx$. Otrzymujemy

(10) $$\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx = \int_0^{na} \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

a

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{na} \frac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

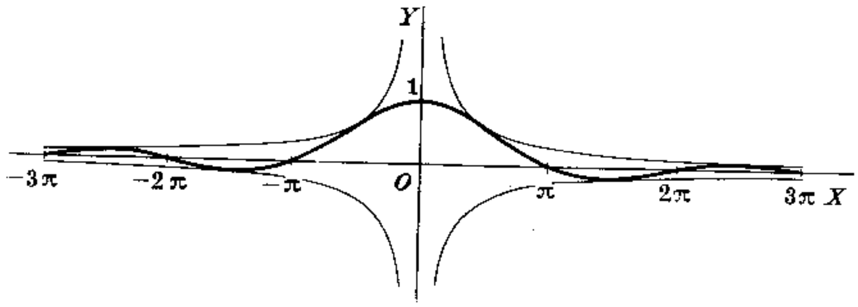
bo $\lim_{n=\infty} na = \infty$.

Uwaga 1. Oznaczmy $I_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Mamy więc

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} I_n .$$

Jest to szereg naprzemienny (co łatwo też geometrycznie zilustrować na wykresie funkcji $y = \sin x / x$, por. rys. 25) o składnikach malejących (bezwzględnie) i dążących do 0. Istotnie, podstawiając $y = x - n\pi$, mamy

$$I_n = \int\limits_0^\pi \frac{\sin(y+n\pi)}{y+n\pi} dy = \pm \int\limits_0^\pi \frac{\sin y}{y+n\pi} dy$$



Rys. 25

oraz

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin y}{y+n\pi} dy < \int\limits_0^\pi \frac{\sin y}{y+(n-1)\pi} dy = \pm I_{n-1} .$$

Stąd z łatwością wynika, że dla każdego $a > 0$ zachodzi wzór

(11) $$\left| \int\limits_0^a \frac{\sin x}{x} dx \right| \leqslant \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx .$$

Wzór ten w zestawieniu z (10) daje

(12) $$\left| \int\limits_0^a \frac{\sin nx}{x} dx \right| \leqslant \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx .$$

Przykład 3. Podobnie jak w przykładzie poprzednim, dowodzimy zbieżności całki (*Fresnela,* stosowanej w optyce) $\int\limits_0^\infty \sin(x^2) dx$, nie znając całki nieoznaczonej. Przez podstawienie $x^2 = t$ otrzymujemy

$$\int\limits_1^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt .$$

Stosując do ostatniej całki drugie twierdzenie o wartości średniej, znajdujemy

$$\int_a^b \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_a^\xi \sin t\,dt + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_\xi^b \sin t\,dt$$

i rozumując jak w przykładzie poprzednim, dowodzimy zbieżności całki $\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$. Tym samym zbieżna jest całka $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)\,dx$, a więc i całka $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\,dx$, ponieważ całka $\int\limits_0^1 \sin(x^2)\,dx$ jest całką właściwą.

Przykład 4. Udowodniliśmy poprzednio zbieżność całki $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Udowodnimy obecnie, że

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Na mocy (9)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

skąd

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx.$$

Tę ostatnią całkę sprowadzimy do całki $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$, którą najpierw obliczymy. Wykażemy mianowicie, że

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Istotnie, ze wzoru (por. (2), § 1.2)

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(2n+1)t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

wynika, że

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \ldots + 2\cos 2nx,$$

skąd

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2x\,dx + \ldots + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 2nx\,dx = \frac{\pi}{2},$$

ponieważ wszystkie całki występujące w środkowej części tej podwójnej równości znikają.

Wzór (14) jest więc udowodniony. Pozostaje do udowodnienia, że

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}-\frac{\sin(2n+1)x}{x}\right)dx=0,$$

czyli że

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\sin(2n+1)x\,dx=0.$$

Otóż ta ostatnia równość jest bezpośrednią konsekwencją udowodnionego przez nas wzoru (przykład 3, § 10.2)

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}f(x)\sin nx\,dx=0,$$

w którym podstawiamy

$$f(x)=\frac{x-\sin x}{x\sin x}\quad\text{dla } x>0\quad\text{oraz}\quad f(0)=0.$$

Tak określona funkcja f jest ciągła, bowiem

$$\lim_{x=0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=0$$

(por. (18), § 8.4).

PRZYKŁAD 5. *Całka Dirichleta*: $\int\limits_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx$. Udowodnimy, że *jeśli funkcja f jest monotoniczna i f' ciągła w przedziale $0\leqslant x\leqslant a$ $(a>0)$, to*

$$\lim_{n=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\frac{\pi}{2}f(0). \tag{15}$$

Niech dana będzie liczba $\varepsilon>0$. Dobieramy c w taki sposób, aby

$$|f(c)-f(0)|<\varepsilon\quad\text{oraz}\quad 0<c<a. \tag{16}$$

Aby oszacować różnicę $\int\limits_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx-\frac{\pi}{2}f(0)$, przyjmijmy

$$\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx-\frac{\pi}{2}f(0)=$$

$$=\int_0^c\big(f(x)-f(0)\big)\frac{\sin nx}{x}dx+f(0)\left(\int_0^c\frac{\sin nx}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right)+\int_c^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx$$

i oszacujmy każdy z trzech składników prawej strony równości z osobna.

Do pierwszego składnika możemy zastosować drugie twierdzenie o wartości średniej ze względu na to, że funkcja $g(x) = f(x)-f(0)$ jest monotoniczna. Otrzymujemy, biorąc pod uwagę, że $g(0) = 0$,

$$\int_0^c \big(f(x)-f(0)\big)\frac{\sin nx}{x}\,dx = \big(f(c)-f(0)\big)\int_{\xi_n}^c \frac{\sin nx}{x}\,dx, \qquad 0 \leqslant \xi_n \leqslant c.$$

Na mocy (12)

$$\left|\int_{\xi_n}^c \frac{\sin nx}{x}\,dx\right| \leqslant 2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Nierówność ta w zestawieniu z nierównością (16) daje

$$\left|\int_0^c \big(f(x)-f(0)\big)\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| \leqslant 2\varepsilon\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{17}$$

Aby oszacować drugi składnik, zauważmy, że na mocy wzorów (9) i (13)

$$\lim_{n=\infty}\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

A zatem dla dostatecznie dużych n mamy

$$\left|\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon. \tag{18}$$

Wreszcie zastępując we wzorze przykładu 3, § 10.2, $f(x)$ przez $f(x)/x$ i biorąc pod uwagę nierówność $0 < c < a$, otrzymujemy

$$\lim_{n=\infty}\int_c^a f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx = 0,$$

skąd wnioskujemy, że dla dostatecznie dużych n

$$\left|\int_c^a f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| < \varepsilon. \tag{19}$$

Z zestawienia nierówności (17)-(19) otrzymujemy żądane oszacowanie dla

$$\left|\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}f(0)\right|,$$

a stąd wynika wzór (15).

Uwaga 2. Wzór (15) pozostaje w mocy, gdy zastąpić założenie ciągłości f' i monotoniczności f przez założenie słabsze, mianowicie przez założenie, że funkcja f jest przedziałami ciągła wraz ze swą pochodną i przedziałami monotoniczna; równocześnie $f(0)$ należy zastąpić przez $f(+0)$ (w przypadku gdy funkcja f jest nieciągła w punkcie 0); tj.

$$\lim_{n=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\frac{\pi}{2}f(+0). \tag{20}$$

Istotnie, założenie nasze oznacza (por. § 5.1), że istnieje taki układ punktów $0=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_m=a$, że dla każdego $k\leqslant m$ funkcja f_k określona przez warunki

$$f_k(x)=f(x) \quad \text{dla} \quad a_{k-1}<x<a_k$$

oraz

$$f_k(a_{k-1})=f(a_{k-1}+0), \quad f_k(a_k)=f(a_k-0)$$

jest ciągła wraz ze swą pochodną i monotoniczna w całym przedziale $a_{k-1}\leqslant x\leqslant a_k$.

Stosując twierdzenie o podziale przedziału całkowania do całek niewłaściwych otrzymujemy

$$\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\int_{a_0}^{a_1}f_1(x)\frac{\sin nx}{x}dx+\ldots+\int_{a_{m-1}}^{a_m}f_m(x)\frac{\sin nx}{x}dx.$$

Stąd

$$\lim_{n=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\sum_{k=1}^{m}\lim_{n=\infty}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f_k(x)\frac{\sin nx}{x}dx.$$

Stąd zaś otrzymujemy wzór (20), ponieważ z jednej strony na mocy (15)

$$\lim_{n=\infty}\int_{a_0}^{a_1}f_1(x)\frac{\sin nx}{x}dx=\frac{\pi}{2}f_1(0)=\frac{\pi}{2}f(+0),$$

a z drugiej strony na mocy przykładu 3 z § 10.2 dla każdego $k>1$ mamy

$$\lim_{n=\infty}\int_{a_{k-1}}^{a_k}f_k(x)\frac{\sin nx}{x}dx=0$$

ze względu na ciągłość funkcji $f_k(x)/x$ w przedziale $a_{k-1}\leqslant x\leqslant a_k$.

Przykład 6. Ze wzoru (15) z łatwością wynika wzór następujący, który interweniować będzie w teorii szeregów Fouriera

$$\lim_{n=\infty}\int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}f(+0) \qquad 0<a<\pi, \tag{21}$$

przy czym o funkcji f zakładamy jak poprzednio, że jest przedziałami ciągła (wraz ze swą pochodną) i przedziałami monotoniczna.

Wystarczy w tym celu zauważyć, że jeśli $0 \leqslant u < v < \pi$, to

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_u^v f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx - \int_u^v f(x)\frac{\sin nx}{x}dx\right) = \lim_{n=\infty}\int_u^v f(x)\frac{x-\sin x}{x\sin x}\sin nx\,dx = 0.$$

Biorąc bowiem pod uwagę, że

$$\lim_{x=0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = 0$$

(por. (18), § 8.4) oraz że $x < \pi$, można we wzorze przykładu 3 z § 10.2 podstawić na miejsce funkcji $f(x)$ funkcję $f(x)\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$.

PRZYKŁAD 7. *Całka Poissona* [1] $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Zauważmy przede wszystkim, że stosując podstawienie $x = z\sqrt{n}$ otrzymujemy

(22) $$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nz^2}dz.$$

Aby tę ostatnią całkę móc porównać ze znanymi nam całkami

(23) $$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$$

oraz

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(por. (9) i przykład 1, § 10.2), zastosujemy podwójną nierówność

$$1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

która wynika z nierówności $e^t \geqslant 1+t$ (por. (16), § 8.4) przez podstawienie $t = -x^2$ oraz $t = x^2$. Mamy więc

$$(1-x^2)^n \leqslant e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

(pierwsza nierówność dla $|x| \leqslant 1$), skąd

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}dx \leqslant \int_0^\infty e^{-nx^2}dx \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

---

[1] S. Poisson (1781-1840) — autor licznych prac z rachunku prawdopodobieństwa, mechaniki, fizyki i astronomii.

Uwzględniając wzory (22) i (23), wnosimy stąd, że

$$\sqrt{n}\,\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} \leqslant \int_0^\infty e^{-x^2}dx \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{n}.$$

Oznaczając przez a_n lewy człon tej zależności, a przez b_n człon prawy, mamy

$$a_n \leqslant \int_0^\infty e^{-x^2}dx \leqslant b_n \quad \text{dla każdego } n = 1, 2, \ldots$$

Zarazem na mocy wzoru Wallisa (wzór (29), § 10.9):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n\to\infty} c_n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}.$$

A zatem

$$a_n = c_n\frac{2n}{2n+1}$$

i ponieważ ciąg $\{c_n\}$ jest, jak łatwo sprawdzić, malejący, więc $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} < c_n$, tj. $\frac{1}{2}\pi < 2c_n^2$, skąd

$$b_n \leqslant \sqrt{n}\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}2c_n^2 = c_n\frac{2n}{2n-1}.$$

W rezultacie dochodzimy do wniosku, że

$$c_n\frac{2n}{2n+1} \leqslant \int_0^\infty e^{-x^2}dx \leqslant c_n\frac{2n}{2n-1},$$

a ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1} = 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1},$$

przeto

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

11.5. Funkcja Eulera. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$. Całka ta dla $x < 1$ posiada obie osobliwości: jest bowiem określona w nieskończonym przedziale całkowania, a ponadto funkcja podcałkowa dąży do ∞, gdy t dąży do 0. Aby wykazać jej zbieżność, rozłożymy ją na dwie całki

(24) $$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \quad \text{oraz} \quad \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

i udowodnimy zbieżność każdej z nich z osobna.

Aby udowodnić zbieżność pierwszej z tych całek, zauważmy, że $0 < t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$, ponieważ $t > 0$. Ponieważ zaś całka $\int\limits_0^1 t^{x-1}dt$ jest zbieżna ze względu na to, że $1-x < 1$ (por. przykład 1, § 11.2), wnosimy, że pierwsza z całek (24) jest zbieżna.

Zarazem

$$t^{x-1}e^{-t} = \frac{t^{x+1}}{e^t}\cdot\frac{1}{t^2} \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{t=\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$$

(por. (27), § 7.7), a zatem dla dostatecznie dużych t mamy $t^{x-1}e^{-t} < 1/t^2$ i zbieżność drugiej całki (24) wynika ze zbieżności całki $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ (por. (3), § 11.1).

W ten sposób zbieżność całki $\Gamma(x)$ dla każdego $x > 0$ została udowodniona.

Wykażemy obecnie, że dla naturalnych n zachodzi wzór

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{25}$$

Stosujemy w tym celu do całki $\Gamma(x)$ przy $x > 1$ wzór na całkowanie przez części

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= -\int\limits_0^\infty t^{x-1}\frac{de^{-t}}{dt}dt = -\left[t^{x-1}e^{-t}\right]_0^\infty + (x-1)\int\limits_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt = \\ &= (x-1)\Gamma(x-1).\end{aligned} \tag{26}$$

Stąd wyprowadzamy przez indukcję wzór (25), opierając się na równości

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}dt = 1 = 0!$$

Zauważmy, że rozpatrywana w § 11.4 całka Poissona jest połową wartości funkcji Γ dla $x = \frac{1}{2}$. Stosując bowiem podstawienie $t = z^2$, znajdujemy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}. \tag{27}$$

11.6. Zależność między zbieżnością całki a zbieżnością szeregu nieskończonego.

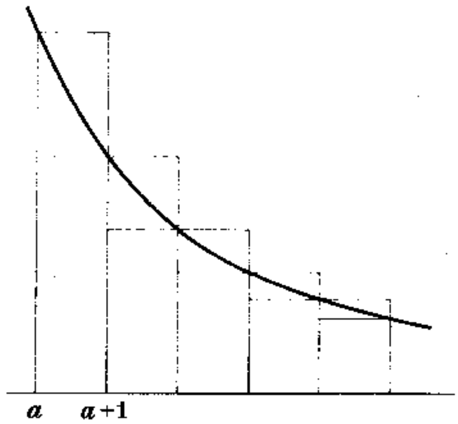
TWIERDZENIE (CAUCHY-MACLAURINA). *Niech funkcja f będzie ciągła, malejąca i dodatnia w przedziale nieskończonym $x \geqslant a$. Wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności całki $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżność szeregu nieskończonego $\sum\limits_{n=1}^\infty f(a+n)$.*

Z założenia $f(a+n) \leqslant f(x) \leqslant f(a+n-1)$ dla $a+n-1 \leqslant x \leqslant a+n$ (rys 26). A zatem

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(a+n)\,dx \leqslant \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx \leqslant \int_{a+n-1}^{a+n} f(a+n-1)\,dx,$$

czyli

$$f(a+n) \leqslant \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)\,dx \leqslant f(a+n-1).$$



Rys. 26

Oznaczając przez S_n sumę częściową szeregu $\sum_{m=1}^{\infty} f(a+m)$, czyli

$$S_n = f(a+1)+\ldots+f(a+n),$$

mamy więc

$$S_n \leqslant \int_{a}^{a+n} f(x) \leqslant S_{n-1}+f(a).$$

Jeżeli przypuścimy, że całka jest zbieżna, to wnioskujemy stąd, że szereg rozważany jest ograniczony

$$S_n \leqslant \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

a zatem że jest zbieżny (jako szereg o wyrazach dodatnich). Odwrotnie, jeśli założyć zbieżność szeregu, to mamy

$$\int_{a}^{a+n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} f(a+m) \quad \text{dla każdego } n.$$

Stąd

$$\int_{a}^{x} f(x)\,dx \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} f(a+m) \quad \text{dla każdego } x;$$

oznaczając bowiem dla danego x przez n taką liczbę naturalną, że $x < a+n$, mamy

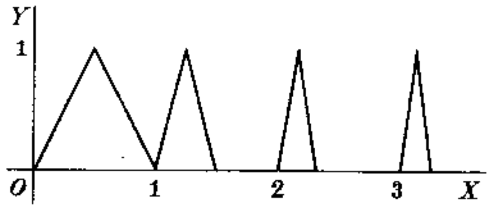
$$\int_a^x f(x)\,dx \leqslant \int_a^{a+n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} f(a+m).$$

Funkcja $\int_a^x f(t)\,dt$ jest więc ograniczona i w konsekwencji całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna (por. tw. 1, § 11.1).

Uwaga 1. Założenie, że funkcja f jest dodatnia, można w powyższym twierdzeniu pominąć. Jeśli bowiem funkcja malejąca jest ujemna, to zarówno całka jak i szereg rozważany są rozbieżne do $-\infty$.

Uwaga 2. Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ funkcji malejącej jest zbieżna, to jak widać natychmiast, $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$. Jeśli jednak funkcja nie jest malejąca, to całka może być zbieżna, mimo że równość ta nie zachodzi. Świadczy o tym przykład 3 rozważany przez nas w § 11.4 całki $\int_0^\infty \sin(x)^2\,dx$; całka ta jest zbieżna, a granica $\sin(x^2)$, gdy x dąży do ∞, nie istnieje.

Można nawet powyższą osobliwość zaostrzyć, zakładając, że $f(x) \geqslant 0$. Zbudujmy mianowicie ciąg nieskończony trójkątów równoramiennych o wysokości 1 i mających jako podstawę kolejno odcinki: $(0, 1)$, $\left(1, 1\frac{1}{2}\right)$, ..., $\left(n, n+\frac{1}{2^n}\right)$, ... osi X (rys. 27). Niech $y = f(x)$ będzie wykresem łamanej nieskończonej złożonej z boków tych trójkątów (różnych od podstaw) oraz



Rys. 27

z odcinków osi X, łączących kolejne trójkąty. Obszar zawarty pomiędzy tą łamaną a osią X jest więc złożony z powyższych trójkątów; pole jego jest zatem sumą ich pól, zatem

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = 1.$$

Zarazem $\lim_{x=\infty} f(x)$ nie istnieje.

PRZYKŁAD 1. Szereg $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla każdego $s > 1$ [1], ponieważ całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ jest zbieżna (por. (3), § 11.1).

PRZYKŁAD 2. Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ jest zbieżny dla $s > 1$, a rozbieżny dla $s = 1$.

Aby to udowodnić, weźmy pod uwagę całkę $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^s}$. Otóż

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^s} = \int \frac{d\log x}{(\log x)^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{(\log x)^{s-1}} \quad \text{dla} \quad s > 1.$$

Ponieważ

$$\lim_{x=\infty} (\log x)^{s-1} = \infty,$$

więc

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^s} = \frac{1}{(s-1)(\log 2)^{s-1}}.$$

Na mocy twierdzenia Cauchy-Maclaurina wnosimy stąd, że szereg nasz jest dla $s > 1$ zbieżny. Natomiast dla $s = 1$ szereg ten jest rozbieżny, bowiem

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{d\log x}{\log x} = \log(\log x),$$

co ze względu na równość $\lim_{x=\infty} \log(\log x) = \infty$ pociąga za sobą rozbieżność całki $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$.

PRZYKŁAD 3. Podobnie można dowieść, że całka

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)(\log(\log x))^s}$$

jest zbieżna dla $s > 1$; a rozbieżna dla $s = 1$ (a dostatecznie duże). Stąd zaś wynika, że szereg

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^s}$$

jest zbieżny dla $s > 1$ i rozbieżny dla $s = 1$.

[1] Funkcja $\zeta(s)$ (Riemanna) posiada ważne znaczenie dla teorii liczb.

Ogólniejsze wyniki otrzymuje się rozważając iloczyn n kolejnych iteracji logarytmu, z których ostatnia podniesiona jest do potęgi s (w poprzednim przykładzie $n = 2$, zerowa iteracja równa jest x).

Prowadzi to do dalszych typów szeregów zbieżnych oraz do ciągu nieskończonego coraz wolniej rozbieżnych szeregów nieskończonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)} \quad \text{itd.}$$

PRZYKŁAD 4. *Kryteria logarytmiczne.* Porównanie składników szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ ze składnikami szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ prowadzi do następującego kryterium zbieżności: *jeśli* $a_n > 0$ *i*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(na_n)}{\log(\log n)} < -1, \tag{28}$$

to szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny; jeśli ta granica jest większa od* -1, *to szereg jest rozbieżny.*

Istotnie załóżmy, że spełniona jest nierówność (28) i oznaczmy przez $-s$ liczbę większą od rozważanej granicy, a mniejszą od -1. Mamy więc $s > 1$ oraz dla dostatecznie dużych n

$$\log(na_n) < -s \log(\log n) = \log(\log n)^{-s},$$

skąd

$$na_n < (\log n)^{-s}, \quad \text{czyli} \quad a_n < \frac{1}{n(\log n)^s}.$$

A zatem na mocy twierdzenia o porównywaniu szeregów o składnikach dodatnich zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$.

Jeśli natomiast rozważana we wzorze (28) granica jest większa od -1, to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\log(na_n) > -\log(\log n),$$

skąd

$$na_n > (\log n)^{-1}, \quad \text{czyli} \quad a_n > \frac{1}{n \log n},$$

i rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ pociąga za sobą rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$.

Przypadek, gdy rozważana granica jest równa -1, stanowi wypadek „wątpliwy” dla naszego kryterium logarytmicznego, tzn. nie można na podstawie tego kryterium osądzić czy szereg jest zbieżny, czy rozbieżny.

Można jednak wówczas stosować mocniejsze kryteria logarytmiczne, do których prowadzą szeregi rozpatrywane w przykładzie 3.

Dodajmy, że istnieją szeregi (o wyrazach dodatnich), które na żadne kryterium logarytmiczne nie reagują.

11.7. Szeregi Fouriera[1]. Niech dany będzie szereg trygonometryczny zbieżny następującej postaci:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \\ + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \ldots \tag{29}$$

Zauważmy, że jeśli szereg rozważany jest jednostajnie zbieżny w przedziale $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, to współczynniki a_n i b_n dają się łatwo wyrazić w zależności od sumy szeregu, tj. od funkcji f. Mianowicie, ze względu na jednostajną zbieżność mamy (por. tw. 12, § 10.2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,dx.$$

Ponieważ zaś

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{2}a_0\,dx = \pi a_0,$$

więc

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{30}$$

Aby obliczyć a_n, mnożymy obie strony równości (29) przez $\cos nx$ i podobnie jak poprzednio znajdujemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{2}a_0\cos nx\,dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_m\cos mx\cos nx + b_m\sin mx\cos nx)\,dx.$$

Ponieważ zaś (por. przykład 4, § 10.1)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx$$

dla $m \neq n$, przeto

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \tag{31}$$

---

[1] J. Fourier (1768-1830). Rozwinięcia funkcji w szeregi znane pod jego imieniem wprowadził Fourier w związku z pracami z teorii ciepła.

Podobnie znajdujemy

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{32}$$

Powstaje następujące zagadnienie: jakie funkcje f dadzą się przedstawić w postaci (29), przy czym współczynniki a_n i b_n mają spełniać wzory (30)-(32) (tzw. *wzory Eulera-Fouriera*). Jeśli tego rodzaju rozwinięcie istnieje, to nazywamy je *szeregiem Fouriera funkcji* f.

Jest rzeczą oczywistą, że ze względu na okresowość funkcji cosinus i sinus założyć należy okresowość funkcji f. Założymy ponadto, że funkcja f jest przedziałami monotoniczna (por. § 4.2).

Udowodnimy mianowicie następujące:

TWIERDZENIE. *Każda funkcja okresowa f o okresie 2π (tzn. $f(x+2\pi) = f(x)$), przedziałami ciągła (wraz ze swą pochodną), przedziałami monotoniczna i spełniająca (w punktach nieciągłości) warunek*

$$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{33}$$

daje się rozwinąć w szereg Fouriera.

Oznaczmy przez $S_n(x)$ n-tą sumę częściową szeregu (29), tj.

$$S_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{34}$$

Należy dowieść, że jeśli współczynniki spełniają warunki (30)-(32), to

$$f(x) = \lim_{n=\infty} S_n(x). \tag{35}$$

Wymienione warunki pozwalają przekształcić wzór (34), jak następuje

$$\begin{aligned}\pi S_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos t\cos x + \sin t\sin x)\,dt + \ldots + \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx)\,dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bigl(\tfrac{1}{2} + \cos(t-x) + \cdots + \cos n(t-x)\bigr)\,dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt\end{aligned} \tag{36}$$

na mocy znanego wzoru (por. (2), § 1.2):

$$\tfrac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = \frac{\sin\frac{1}{2}(2n+1)t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

Podstawmy $\frac{1}{2}(t-x)=z$. Otrzymujemy

$$\pi S_n(x)=\int\limits_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz. \tag{37}$$

Rozkładając tę całkę na dwie całki w przedziałach od 0 do $\frac{1}{2}(\pi-x)$ i od $\frac{1}{2}(-\pi-x)$ do 0 i podstawiając w drugiej całce $z=-y$, otrzymujemy

$$\pi S_n(x)=\int\limits_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz+\int\limits_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2y)\frac{\sin(2n+1)}{\sin y}\,dy. \tag{38}$$

Udowodnimy obecnie równość (35) dla $-\pi<x<\pi$. Ze względu na (33) wystarczy dowieść, że

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz=\frac{\pi}{2}f(x+0) \tag{39}$$

oraz

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2y)\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy=\frac{\pi}{2}f(x-0). \tag{40}$$

Oznaczmy przy danym x: $f(x+2z)=g(z)$. Funkcja $g(z)$ jest więc przedziałami ciągła (wraz ze swą pochodną) i przedziałami monotoniczna. Spełnia ona zatem (por. (21)) wzór

$$\lim_{n=\infty}\int\limits_0^{a} g(z)\frac{\sin nz}{\sin z}\,dz=\frac{\pi}{2}g(+0),\qquad \text{o ile}\quad 0<a<\pi. \tag{41}$$

We wzorze tym można zastąpić a przez $\frac{1}{2}(\pi-x)$, nierówność bowiem $-\pi<x<\pi$ pociąga za sobą nierówność $0<\frac{1}{2}(\pi-x)<\pi$. Ponieważ zaś $g(+0)=f(x+0)$, wzór (41) natychmiast daje (39) (przechodzimy od ciągu $n=1,2,\ldots$ do podciągu liczb nieparzystych).

Zupełnie podobnie, oznaczając $f(x-2y)=h(y)$ i biorąc pod uwagę, że $0<\frac{1}{2}(\pi+x)<\pi$ i że $h(+0)=f(x-0)$, otrzymujemy wzór (40).

Twierdzenie nasze jest więc udowodnione dla $-\pi<x<\pi$. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $x=-\pi$ (lub gdy $x=\pi$).

Niech więc $x=-\pi$. Zgodnie z (38) mamy

$$\pi S_n(-\pi)=\int\limits_0^{\pi} f(-\pi+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz.$$

Rozkładając tę całkę na dwie całki: w przedziałach od 0 do $\frac{1}{2}\pi$ i od $\frac{1}{2}\pi$ do π i podstawiając w drugiej całce $y = \pi - z$, otrzymujemy

$$\pi S_n(-\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(-\pi+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\pi-2y)\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy.$$

Jak poprzednio, pierwsza z tych całek dąży do $\frac{1}{2}\pi f(-\pi+0)$, druga do $\frac{1}{2}\pi f(\pi-0)$, tj. do $\frac{1}{2}\pi f(-\pi-0)$ (ze względu na okresowość funkcji f). Wzór (35) zachodzi więc również i dla $x = -\pi$; a zatem — ze względu na okresowość — dla każdego x.

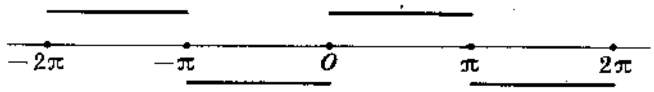
W ten sposób twierdzenie nasze udowodnione jest w całości.

11.8. Zastosowania i przykłady.

PRZYKŁAD 1. Niech f oznacza funkcję okresową o okresie 2π daną przez następujące warunki:

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}\pi \quad \text{dla } -\pi < x < 0, \quad f(0) = 0,$$
$$f(x) = \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{dla } 0 < x < \pi, \quad f(\pm\pi) = 0.$$

Wykres tej funkcji (rys. 28) składa się więc z odcinków długości π położonych na przemian na prostych $y = \frac{1}{4}\pi$ i $y = -\frac{1}{4}\pi$ oraz punktów osi X będących całkowitymi wielokrotnościami liczby π (końce odcinków do wykresu nie należą).



Rys. 28

Widać natychmiast, że funkcja tak określona jest przedziałami ciągła oraz przedziałami monotoniczna (mianowicie w przedziałach postaci $(m-1)\pi < x < m\pi$, gdzie m jest liczbą całkowitą); ponadto spełniony jest warunek (33). Do funkcji tej można więc stosować twierdzenie o rozwijaniu w szereg Fouriera.

Obliczmy współczynniki a_n i b_n stosownie do wzorów (30)-(32).

Otrzymujemy

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\frac{\pi}{4}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{4}\left\{\int_{-\pi}^{0} -\cos nx\,dx + \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right\} = 0 \qquad (n > 0),$$

$$b_n = \frac{1}{4}\left\{\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\,dx + \int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right\} = \frac{1}{4n}(2-2\cos n\pi),$$

a więc $b_n = 0$ dla n parzystych i $b_n = 1/n$ dla n nieparzystych.

W rezultacie

(42) $$f(x) = \sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

Dla x spełniającego warunek $0 < x < \pi$ możemy więc $f(x)$ zastąpić przez $\frac{1}{4}\pi$.

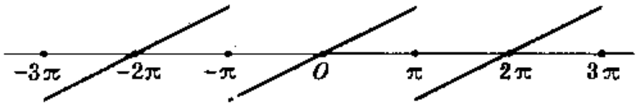
W szczególności, podstawiając $x = \frac{1}{2}\pi$, otrzymujemy znane już nam rozwinięcie Leibniza (por. (51), § 7.11)

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

PRZYKŁAD 2. Niech f będzie funkcją o okresie 2π zdefiniowaną jak następuje:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x, \quad \text{gdy} \quad -\pi < x < \pi, \quad f(-\pi) = 0 = f(\pi).$$

Konstatujemy z łatwością, że funkcja f tak określona jest przedziałami ciągła i przedziałami monotoniczna (por. rys. 29). Ponadto spełniony jest warunek (33). Funkcja f daje się więc rozwinąć w szereg Fouriera.



Rys 29

Obliczając na mocy wzorów (30)-(32) współczynniki a_n i b_n, znajdujemy

(43) $$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots \qquad -\pi < x < \pi.$$

Zauważmy, że podstawiając $x = \frac{1}{2}\pi$, znajdujemy rozwinięcie Leibniza dla $\frac{1}{4}\pi$ (podobnie jak w przykładzie poprzednim).

PRZYKŁAD 3. Rozwiniemy funkcję $f(x) = |x|$ w przedziale $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Dla innych x-ów funkcja jest określona przez warunek $f(x+2m\pi) = f(x)$. Jest to więc funkcja ciągła na całej osi X. Wykresem jej jest linia łamana.

Obliczmy współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{4}{\pi n^2}$$

w zależności od tego czy n jest parzyste (większe od 0), czy nieparzyste. Mamy bowiem

$$\int x\cos nx\,dx = \frac{1}{n}x\sin nx - \frac{1}{n}\int \sin nx\,dx = \frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx.$$

Analogicznie znajdujemy

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\,dx = 0.$$

A zatem

(44) $$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

Zauważmy, że w szczególności podstawiając $x = 0$, otrzymujemy

(45) $$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Stąd *wzór Eulera*

(46) $$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Oznaczając bowiem sumę tego szeregu przez s, mamy

$$\frac{s}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots, \quad \text{a więc} \quad s - \frac{s}{4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots,$$

zatem $\frac{3}{4}s = \frac{1}{8}\pi^2$, czyli $s = \frac{1}{6}\pi^2$.

PRZYKŁAD 4. Niech $y = \cos tx$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Zakładamy przy tym, że t nie jest liczbą całkowitą. Wzory (30)-(32) dają z łatwością

$$a_0 = \frac{2}{\pi t}\sin \pi t, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{t}{t^2 - n^2}\sin \pi t, \qquad b_n = 0.$$

A zatem

(47) $$\pi\cos tx = 2t\sin\pi t\left(\frac{1}{2t^2} - \frac{\cos x}{t^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{t^2 - 2^2} - \ldots\right).$$

W szczególności podstawiając $x = \pi$, otrzymujemy po podzieleniu obu stron równości (47) przez $\sin \pi t$

(48) $$\pi \operatorname{ctg} \pi t = \frac{1}{t} + 2t\left(\frac{1}{t^2 - 1^2} + \frac{1}{t^2 - 2^2} + \ldots\right).$$

Wzór (48) daje następujące interesujące zastosowanie.

Przyjmijmy

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}.$$

Dla danej liczby x spełniającej warunek $0 < x < 1$ szereg $S(t)$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $0 \leqslant t \leqslant x$, bowiem

$$\frac{t}{n^2 - t^2} < \frac{1}{n^2 - x^2},$$

a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$ jest, jak łatwo zauważyć, zbieżny.

Szereg $S(t)$ można więc całkować wyraz po wyrazie w przedziale $0 \leqslant t \leqslant x$. Ponieważ

$$\int \frac{2t}{n^2-t^2}\,dt = -\log(n^2-t^2),$$

więc

$$\int_0^x \frac{2t}{n^2-t^2}\,dt = -\log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Stąd (por. tw. 12, § 10.2, i wzór (12), § 5,5)

$$\int_0^x S(t)\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = -\log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Z drugiej strony

$$\pi\int\left(\operatorname{ctg}\pi t-\frac{1}{\pi t}\right)dt = \log\sin\pi t-\log\pi t = \log\frac{\sin\pi t}{\pi t}.$$

A zatem

$$\pi\int_0^x\left(\operatorname{ctg}\pi t-\frac{1}{\pi t}\right)dt = \log\frac{\sin\pi x}{\pi x}-\lim_{t=+0}\log\frac{\sin\pi t}{\pi t} = \log\frac{\sin\pi x}{\pi x},$$

bowiem

$$\lim_{t=+0}\log\frac{\sin\pi t}{\pi t} = \log\lim_{t=+0}\frac{\sin\pi t}{\pi t} = \log 1 = 0.$$

Biorąc pod uwagę, że zależność (48) zachodzi dla każdego t spełniającego nierówność $0 < t \leqslant x$ i że funkcja $\operatorname{ctg}\pi t-\dfrac{1}{\pi t}$ ma w punkcie 0 granicę prawostronną, mianowicie $\lim\limits_{t=0}\left(\operatorname{ctg}t-\dfrac{1}{t}\right) = 0$ (por. (19), § 8.4), wnosimy, że

$$\pi\int_0^x\left(\operatorname{ctg}\pi t-\frac{1}{\pi t}\right)dt = -\int_0^x S(t)\,dt,$$

zatem

$$\log\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

czyli

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \qquad -1 < x < 1. \tag{49}$$

Zauważmy jeszcze, że podstawiając we wzorze (49) $x = \frac{1}{2}$, otrzymujemy znany nam już wzór Wallisa (por. (29), § 10.9)

$$(50)\qquad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots = \frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\ldots .$$

Podstawiając $x = \frac{1}{4}$, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(4n)^2}\right] = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\frac{11\cdot 13}{12\cdot 12}\cdot\ldots,$$

skąd ze względu na (50) wnosimy, że

$$\sqrt{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\ldots = \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{100}{99}\cdot\ldots .$$

Zadania

1. Obliczyć

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4},\qquad \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx.$$

2. Zbadać zbieżność całek

$$\int_0^{1}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,\qquad \int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx.$$

3. Niech $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$ i niech dana będzie liczba $c > 0$. Przyjmijmy

$$a_n = \int_{a+c(n-1)}^{a+cn} f(x)\,dx.$$

Jeżeli szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny, to również całka $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna i równa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zastosować powyższe twierdzenie do dowodu zbieżności całki

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

4. Całkę $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ nazywamy *bezwzględnie zbieżną*, jeśli całka $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ jest zbieżna. Udowodnić, że całka bezwzględnie zbieżna jest zbieżna też w zwykłym sensie.

5. Dowieść, że szereg $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}$ jest zbieżny ($k > a$).

6. Dowieść, że

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Wskazówka. Rozwinąć funkcję podcałkową w szereg nieskończony i zastosować wzór (45).

7. Dowieść, że $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$ (por. wzór (45)).

8. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcje

1) x^2, 2) $x\cos x$,

3) $|\sin x|$, 4) $\sinh tx$,

5) $\cosh tx$.

9. Przy założeniu, że układ funkcji $f_1, f_2, \ldots$ jest ortogonalny i że szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie (w rozważanym przedziale ab), obliczyć współczynniki a_n (w zależności od funkcji $f, f_1, f_2, \ldots$).

DODATEK

ZADANIA UZUPEŁNIAJĄCE

Opracował W. Kołodziej

Zadania do § 1

1.1. Dowieść, że
$$|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

1.2. Dowieść, że
$$\frac{|a_1+a_2+\ldots+a_n|}{1+|a_1+a_2+\ldots+a_n|} \leqslant \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{|a_2|}{1+|a_2|} + \ldots + \frac{|a_n|}{1+|a_n|}.$$

1.3. Udowodnić nierówności
$$\sqrt[m]{a+b} \leqslant \sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}, \qquad |\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}| \leqslant \sqrt[m]{|a-b|}$$
dla $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (m jest liczbą naturalną).

1.4. Dowieść, że jeżeli $c \geqslant 1$, to dla dowolnych a i b zachodzi nierówność
$$\left|\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2}\right| \leqslant c|a-b|.$$
Wykazać, że liczby $c < 1$ nie posiadają tej własności.

1.5. Dowieść, że
$$\sqrt[m]{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{m}$$
dla $a > -1$ (m jest liczbą naturalną).

1.6. Udowodnić, że dla dowolnych naturalnych n i k zachodzi nierówność
$$2^n > \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Wskazówka. Podstawić odpowiednią liczbę całkowitą m w nierówności $2^m > 1+m$ (wynikającej z nierówności Bernoulliego).

1.7. Wyznaczyć kres dolny i kres górny zbioru wszystkich ułamków dziesiętnych postaci 0,11 ... 1.

1.8. Analogicznie: znaleźć kresy zbioru wszystkich liczb postaci $\dfrac{(n+m)^2}{2^{nm}}$, gdzie n i m są liczbami naturalnymi.

2.8. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy ciągiem o wahaniu ograniczonym, jeżeli ograniczony jest ciąg $\{s_n\}$ o wyrazach

$$s_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_{n+1} - a_n|.$$

Dowieść, że każdy ciąg o wahaniu ograniczonym jest zbieżny. Wykazać na przykładzie, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

2.9. Wyznaczyć granicę ciągu $\{a_n\}$ zdefiniowanego przez indukcję:

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|$.

2.10. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem nie ograniczonym ani z góry, ani z dołu i takim, że $\lim\limits_{n=\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Dowieść, że każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego podciągu tego ciągu.

Zadania do § 3

3.1. Dowieść zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+(-1)^n)^n}{4^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{\pi n}{8}.$$

3.2. Dowieść zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

3.3. Zbadać zbieżność szeregu

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

3.4. Zakładając, że t nie jest całkowitą wielokrotnością liczby 2π udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^a}$ jest zbieżny bezwzględnie dla $a > 1$ i zbieżny warunkowo dla $0 < a \leqslant 1$.

Wskazówka. Dla dowodu rozbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nt}{n^a}\right|$ przy $0 < a \leqslant 1$ zastosować nierówność $|\cos nt| \geqslant \cos^2 nt$.

3.5. Dowieść, że jeżeli $a_n \geqslant 0$, to zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

3.6. Dowieść, że jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne i $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ też jest zbieżny.

3.7. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem rozbieżnym o wyrazach dodatnich. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

jest również rozbieżny.

Wskazówka. Zastosować twierdzenie Cauchy'ego (§ 3.2, 1).

3.8. Dowieść zbieżności ciągu $\{a_n\}$ o wyrazie ogólnym

$$a_n = 2\sqrt{n} - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Wskazówka. Zauważyć, że każdy ciąg jest ciągiem sum częściowych pewnego szeregu.

3.9. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n}$ (1).

3.10. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt[4]{n}]} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ posiada następującą własność: dla każdej liczby rzeczywistej x można jego wyrazy pogrupować w ten sposób, aby otrzymać szereg zbieżny do x.

Wskazówka. Zastosować twierdzenie z zadania 2.10.

Zadania do § 4

4.1. Obliczyć granice

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x=0} x \log(x+x^2),$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}, \qquad \lim_{x=0} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

4.2. Obliczyć granice

$$\lim_{x=\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}), \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\log(x+2^x)}{\log(x+3^x)}.$$

4.3. Zbadać istnienie granic

$$\lim_{x=0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}, \qquad \lim_{x=0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\lim_{x=0} \left(\left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x=\infty} \frac{e^x}{x} \sin\sqrt{x}.$$

---

(1) Porównaj definicję funkcji $[x]$ na str. 61.

4.4. Wykazać na przykładzie, że nie jest prawdziwe twierdzenie: jeżeli $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ i $\lim\limits_{y=A} g(y) = B$, to $\lim\limits_{x=a} g(f(x)) = B$ (porównaj § 4.6 (16)).

4.5. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x+1}.$$

Dowieść, że $\lim\limits_{x=+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = 0$.

Zadania do § 5

5.1. Obliczyć granice

$$\lim_{x=0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}, \quad \lim_{x=0} \frac{\log(1+x)}{x},$$

$$\lim_{x=0} \frac{a^x-1}{x} \quad (a>0), \quad \lim_{x=0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

5.2. Dowieść, że dla każdego x zachodzi następujący wzór:

$$e^x = \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

5.3. Załóżmy, że funkcja f spełnia dla każdego x i y warunek

$$f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Udowodnić, że jeżeli funkcja ta jest ciągła w pewnym punkcie a, to jest ciągła w każdym punkcie osi liczbowej.

5.4. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $a < x \leqslant b$ i niech warunek $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ implikuje $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$ dla każdego ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach wymiernych należących do tego przedziału. Dowieść, że istnieje $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$.

5.5. Zakładając ciągłość funkcji f w przedziale $a \leqslant t \leqslant b$ oznaczmy przez $F(x)$ jej kres górny w przedziale $a \leqslant t \leqslant x$. Udowodnić ciągłość funkcji F w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$.

Wskazówka. Jeżeli $x_1 < x_2$, to oczywiście $F(x_1) \leqslant F(x_2)$. Dowieść, że jeżeli $F(x_1) < F(x_2)$, to $F(x_2) = f(t_0)$ dla pewnego punktu t_0 z przedziału $x_1 \leqslant t \leqslant x_2$; w końcu zauważyć, że $F(x_2)-F(x_1) \leqslant f(t_0)-f(x_1)$.

5.6. Niech dana będzie funkcja ciągła f w przedziale nieskończonym $x \geqslant a$. Dowieść, że z istnienia skończonej granicy $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ wynika ograniczoność tej funkcji.

5.7. Zbadać, które z poniższych funkcji są jednostajnie ciągłe:

$$\frac{1}{x}, \quad e^x, \quad x^2, \quad \frac{x}{|x|+1}.$$

5.8. Dowieść, że iloczyn dwóch funkcji jednostajnie ciągłych i ograniczonych jest funkcją jednostajnie ciągłą. Sprawdzić na przykładzie funkcji $x\sin x$, że założenie ograniczoności obu funkcji jest istotne.

5.9. Dowieść, że każda funkcja f jednostajnie ciągła w skończonym przedziale $a < x < b$ posiada skończone granice $\lim\limits_{x=a} f(x)$ i $\lim\limits_{x=b} f(x)$.

5.10. Niech f będzie funkcją ciągłą, określoną w przedziale nieskończonym $x \geqslant a$. Dowieść, że z istnienia skończonej granicy $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ wynika jednostajna ciągłość tej funkcji.

5.11. Udowodnić, że funkcja ciągła w przedziale nieskończonym $x \geqslant a$ i nie ograniczona ani z góry ani z dołu przyjmuje każdą wartość rzeczywistą nieskończenie wiele razy.

5.12. Podać przykład funkcji $y = f(x)$ określonej i różnowartościowej w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$, ciągłej w punkcie $x = 0$ i takiej że funkcja odwrotna $x = g(y)$ nie jest ciągła w punkcie $y_0 = f(0)$.

Zadania do § 6

6.1. Zbadać jednostajną zbieżność następujących ciągów funkcji:

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

i

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}, \quad x \geqslant 1.$$

6.2. Podobnie: zbadać jednostajną zbieżność następujących szeregów funkcyjnych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^4+x^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad x > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad 0 < x < 1.$$

6.3. Dowieść, że funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$$

jest ciągła we wszystkich punktach, w których jest określona (tzn. dla $x \neq \pm n$).

6.4. Sprawdzić, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-n^2 x}$$

jest ciągła w przedziale $x > 0$ i nieciągła w punkcie 0.

6.5. Dowieść, że jeżeli funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ są ciągłe i dodatnie w przedziale domkniętym $a \leqslant x \leqslant b$ i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny do funkcji ciągłej, to zbieżność jest jednostajna.

Wskazówka. Zauważyć, że jednostajna zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest równoważna jednostajnej zbieżności ciągu $R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$ do funkcji równej 0. Zakładając, że zbieżność nie jest jednostajna, stwierdzić istnienie takiego ciągu zbieżnego $\{x_m\}$, że $R_m(x_m) > \varepsilon > 0$ dla nieskończenie wielu wskaźników m. Przyjmując $x_0 = \lim_{m=\infty} x_m$ udowodnić, że $R_n(x_0) > \varepsilon$ dla każdego n.

6.6. Wyznaczyć promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2+(-1)^n)^n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}x^n \quad (\text{gdzie } \varepsilon_n = 0 \text{ lub } 1).$$

6.7. Niech r oznacza promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dowieść, że jeżeli r jest liczbą skończoną i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \infty$, to $\lim_{x=r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \infty$ (uzupełnienie do twierdzenia Abela).

Wskazówka. Sprowadzić dowód do przypadku, gdy $r = 1$; zauważyć także, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$, gdzie $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

6.8. Udowodnić, że jeżeli $a_n \geqslant 0$, to twierdzenie Abela można odwrócić. Mówiąc dokładniej, jeżeli r oznacza promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to (przy założeniu, że r jest liczbą skończoną) istnienie skończonej granicy $\lim_{x=r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = g$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ (do sumy g).

6.9. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będą szeregami zbieżnymi. Udowodnić, że jeżeli zbieżny jest iloczyn Cauchy'ego tych szeregów, tzn. szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ o wyrazach $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

(porównaj twierdzenie Cauchy'ego z § 3.8).

Wskazówka. Zauważyć, że $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dla $0 < x < 1$ i zastosować twierdzenie Abela.

6.10. Niech r oznacza promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dowieść, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n x^n)$ jest zbieżny, jeżeli $|x| < r$ i rozbieżny, jeżeli $|x| > r$.

Zadania do § 7

7.1. Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale nieskończonym $x > a$ i $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$, to równanie $f'(x) = 0$ posiada w tym przedziale co najmniej tyle pierwiastków, ile ich posiada równanie $f(x) = 0$.

7.2. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $a < x < b$ (skończonym albo nieskończonym). Dowieść, że jeżeli pochodna f' jest ograniczona, to funkcja f jest jednostajnie ciągła w tym przedziale.

7.3. Dowieść, że jeżeli pochodna funkcji f, różniczkowalnej w przedziale nieskończonym $x > a$ spełnia warunek $\lim_{x=\infty} f'(x) = \infty$, to funkcja f jest ciągła niejednostajnie w tym przedziale.

7.4. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale nieskończonym $x > a$. Dowieść, że jeżeli $\lim_{x=\infty} f'(x) = g$, to także $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = g$.

7.5. Dowieść, że

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} \qquad (x > -1).$$

Wskazówka. Wyznaczyć pochodną lewej strony.

7.6. Wykazać, że jeżeli $a > 1$, to

$$\frac{1}{2^{a-1}} \leqslant x^a + (1-x)^a \leqslant 1$$

dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

7.7. Dowieść, że jeżeli $0 < a < 1$, to

$$(x+y)^a < x^a + y^a$$

dla dowolnych dodatnich x i y (uogólnienie nierówności z zadania 1.3).

7.8. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $x \geqslant 0$.

Wskazówka. Wyznaczyć kres górny funkcji $x^2 e^{-n^2 x}$.

7.9. Sprawdzić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} \qquad (|x| < 1).$$

7.10. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcje $\frac{1}{(1-x)(2+x)}$ i $\frac{\log(1+x)}{1+x}$.

7.11. Udowodnić, że jeżeli $f'(x) = f(x)$ dla wszystkich $a < x < b$, to $f(x) = Ce^x$, gdzie C jest stałą. Wywnioskować stąd, że dla każdego x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

7.12. Udowodnić, że jeżeli $0 < a < 1$, to równanie

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = ae^x$$

posiada w przedziale $x \geqslant 0$ dokładnie jeden pierwiastek $x = x(n)$. Wykazać, że $\lim_{n=\infty} x(n) = \infty$.

7.13. Udowodnić, że jeżeli $\lim_{n=\infty} a_n = g$ (skończona), to $\lim_{x=\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = g$.

Zadania do § 8

8.1. Niech

$$f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Zbadać istnienie pochodnej drugiego rzędu $f''(x)$.

8.2. Udowodnić, że jeżeli funkcja f posiada pochodną drugiego rzędu w punkcie x, to

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

8.3. Udowodnić, że jeżeli pochodna n-tego rzędu $f^{(n)}$ funkcji f jest ograniczona w skończonym przedziale $a < x < b$, to również funkcja f jest ograniczona.

8.4. Dowieść, że jeżeli $|x| < \frac{1}{2}$, to przybliżony wzór

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2$$

daje wartość $\sqrt{1+x}$ z błędem nie większym od $\frac{1}{2}|x|^3$.

8.5. Stosując wzór Maclaurina do funkcji e^x wyznaczyć pierwsze cztery cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby e.

8.6. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcje $\operatorname{arcsinh} x$ i $\sin^4 x$.

8.7. Wyprowadzić wzór

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n} \, \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n-2)} (1-x^2)^n$$

dla $-1 < x < 1$.

8.8. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $a < x < b$. Dowieść, że jeżeli jej pochodna drugiego rzędu f'' istnieje wewnątrz tego przedziału i $f''(x) > 0$ w każdym jego punkcie, to

$$f(\alpha a + \beta b) < \alpha f(a) + \beta f(b)$$

dla dowolnych liczb dodatnich α i β spełniających warunek $\alpha + \beta = 1$. Podobnie, jeżeli $f''(x) < 0$, to

$$f(\alpha a + \beta b) > \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Podać interpretację geometryczną tych nierówności.

Wskazówka. Zbadać znak pomocniczej funkcji

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

8.9. Niech $p > 0$, $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dowieść, że

$$xy < \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

dla $x > 0$, $y > 0$.

Wskazówka. Przyjąć $f(x) = \log x$ w twierdzeniu z poprzedniego zadania.

Zadania do § 9

9.1. Podać przykład funkcji określonej w przedziale $a < x < b$ i nie posiadającej w tym przedziale funkcji pierwotnej.

9.2. Dowieść istnienia funkcji pierwotnej funkcji

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

9.3. Wyznaczyć całkę

$$\int (|x-1| + |x+1|)\,dx.$$

9.4. Wyprowadzić formuły rekurencyjne

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

i

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

(n jest liczbą naturalną > 2).

9.5. Znaleźć całki

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}, \quad \int\frac{dx}{\cos^4 x}.$$

9.6. Obliczyć metodą rekurencyjną całki

$$\int\frac{dx}{x^n(1+x^2)}, \quad \int \log^n x\,dx,$$

gdzie n jest liczbą naturalną.

Zadania do § 10

10.1. Powołując się na wzór

$$\int\frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$$

otrzymujemy

$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{1+x^4}\,dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\log 5 - 2\operatorname{arctg} 2 < 0.$$

Wynik ten jest fałszywy, ponieważ funkcja pod znakiem całki jest nieujemna. Wyjaśnić przyczynę błędu i znaleźć rzeczywistą wartość tej całki.

10.2. Dowieść, że jeżeli funkcja f jest ciągła i dodatnia w przedziale $a < x < b$ i M oznacza jej kres górny, to zachodzi następujący wzór

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n\,dx} = M.$$

10.3. Niech f będzie funkcją określoną i ciągłą dla wszystkich rzeczywistych x. Wyznaczyć pochodną funkcji g określonej wzorem

$$g(x)=\int_a^b f(x+t)\,dt.$$

10.4. Znaleźć granicę

$$\lim_{n=\infty}\frac{1^m+3^m+\ldots+(2n-1)^m}{n^{m+1}}.$$

Wskazówka. $\dfrac{2k-1}{2n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k-1}{n}+\dfrac{k}{n}\right)$.

10.5. Wyznaczyć

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}.$$

10.6. Dowieść, że jeżeli funkcja f posiada ciągłą pochodną w przedziale $0\leqslant x\leqslant 1$, to

$$\lim_{n=\infty} n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,dx\right]=\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Zastosować ten wzór do obliczenia granicy

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}-\frac{1}{m+1}\right).$$

10.7. Wyznaczyć granice

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\pi}\sqrt[n]{x}\sin x\,dx,\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

10.8. Udowodnić, że jeżeli funkcja f posiada ciągłą pochodną $(n+1)$-go rzędu w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$, to

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n\,dx$$

(inna postać formuły Taylora).

Wskazówka. Dowód przez indukcję zupełną.

Zadania do § 11

11.1. Dowieść zbieżności całek

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(\pi-x)}\,dx,\qquad \int_0^{\infty}\frac{\log x}{1+x^2}\,dx,\qquad \int_1^{\infty}\frac{\cos\sqrt{x}}{x}\,dx.$$

11.2. Wykazać, że całka $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ nie jest zbieżna bezwzględnie (jest więc przykładem całki zbieżnej warunkowo).

Wskazówka. $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$.

11.3. Udowodnić, że jeżeli całka $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie, to

$$\lim_{n=\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos nx\,dx = 0 = \lim_{n=\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx$$

(porównaj § 10.2, przykład 3).

11.4. Dowieść, że jeżeli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, a funkcja g jest monotoniczna, ograniczona i posiada ciągłą pochodną pierwszego rzędu w przedziale $x \geqslant a$, to wtedy całka $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ też jest zbieżna.

Wskazówka. Zastosować twierdzenie Cauchy'ego (§ 11.1,2), uwzględniając drugie twierdzenie o wartości średniej (§ 10.7,2).

11.5. Dowieść, że

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

11.6. Dowieść, że

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+n}$$

dla $a > 0$.

11.7. Dowieść, że

$$\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Wskazówka. Zastosować wzór $\frac{z}{1-z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$.

11.8. Niech f będzie funkcją ciągłą i monotoniczną w przedziale $x \geqslant a$. Dowieść, że jeżeli całka $\int\limits_a^\infty x^a f(x)\,dx$ jest zbieżna, to $\lim\limits_{x=\infty} x^{a+1} f(x) = 0$.

Wskazówka. Rozważyć całkę $\int\limits_x^{2x} t^a f(t)\,dt$.

11.9. Zakładając, że f jest funkcją ciągłą i monotoniczną w przedziale $0 < x \leqslant 1$ i że całka $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ jest zbieżna, udowodnić wzór

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

11.10. Niech f będzie funkcją ciągłą, malejącą i dodatnią w przedziale $x \geqslant 0$. Udowodnić, że jeżeli całka $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, to zachodzi następujący wzór:

$$\lim_{t=+0} t \sum_{n=1}^{\infty} f(tn) = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

W szczególności wyznaczyć granicę

$$\lim_{t=+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{1+n^2t^2}.$$

Wskazówka. Porównaj dowód twierdzenia Cauchy-Maclaurina (§ 11.6).

11.11. Dowieść, że jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale $x \geqslant 0$ i istnieje $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = g$ (skończona), to

$$\lim_{t=\infty} t \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,dx = g.$$

SKOROWIDZ NAZW

SPIS RZECZY

Rozdział II

FUNKCJE

Rozdział III

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

Rozdział IV

RACHUNEK CAŁKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ