Kolokwium 1
5.11.10

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}.$$

Rozwiązanie: Mamy następujące nierówności:

$$3^n \leq 1^n + 2^n + 3^n \leq 3 \cdot 3^n,$$

a więc, wyciągając pierwiastki stronami otrzymujemy

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{3^n} = 3\sqrt[n]{3}.$$

Skrajne ciągi po lewej i prawej oba zbiegają do 3, a więc, z tw. o 3 ciągach także

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n} = 3.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad D_f = \{x : x \neq 1\}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad D_g = \mathbf{R}.$$

Podaj wzór na złożenie $(f \circ g)$, i podaj naturalną dziedzinę złożenia $D_{(f \circ g)}$.

Rozwiązanie: Dziedzina złożenia $f \circ g$ to te punkty $x \in D_g$ dla których $g(x) \in D_f$. Rozwiążmy więc równanie

$$1 = g(x) = \frac{1}{x^2+1} \;\Rightarrow\; x^2+1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Otrzymaliśmy, że $D_{f \circ g} = \{x : x \neq 0\}$. Wzór na złożenie otrzymujemy przez podstawienie:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{\frac{1}{x^2+1}-1} = \frac{x^2+1}{1-(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Wykonaj następujące działanie, i przedstaw wynik w postaci $a + b\,i$:

$$\frac{1+i}{2-3\,i}.$$

Rozwiązanie: Możemy to zrobić na przykład podstawiając $a + b\,i$ do wzoru

$$1 + i = (2 - 3\,i)(a + b\,i) = (2a + 3b) + (2b - 3a)\,i,$$

i rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2a + 3b & = 1, \\ -3a + 2b & = 1 \end{cases} \Rightarrow\ a = \frac{1}{2} - \frac{3b}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}b + 2b = 1\ \Rightarrow\ b = \frac{5}{13},\ a = -\frac{1}{13}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Rozwiąż następujące równanie:

$$|1-2x|+|2x-6|=x.$$

Rozwiązanie: Rozpatrujemy 3 przypadki:

- $x \leq \frac{1}{2}$: wtedy $|1-2x| = 1-2x$ oraz $|2x-6| = 6-2x$ a więc równanie przyjmuje postać $1-2x+6-2x = x$ czyli $7 = 5x \Rightarrow x = \frac{7}{5}$, ale to nie leży w rozpatrywanym przedziale,
- $\frac{1}{2} < x \leq 3$: mamy $|1-2x| = 2x-1$ oraz $|2x-6| = 6-2x$ a więc równanie przyjmuje postać $2x-1+6-2x = x$ czyli $5 = x$, co również nie leży w rozpatrywanym przedziale,
- $x > 3$: mamy wtedy $|1-2x| = 2x-1$ oraz $|2x-6| = 2x-6$ a więc równanie przyjmuje postać $2x-1+2x-6 = x$ czyli $3x = 7 = x \Rightarrow x = \frac{7}{3} < 3$, co również nie leży w rozpatrywanym przedziale.

Równanie nie ma więc rozwiązań.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Pokaż, że następujący ciąg jest rosnący i ograniczony:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n - 2}{3n^2 + 6n - 1}.$$

Rozwiązanie:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n - \frac{1}{3} - \frac{5}{3}}{3n^2 + 6n - 1} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{3n^2 + 6n - 1}.$$

Zauważmy, że mianownik $3n^2 + 6n - 1$ jest rosnący i dodatni, a więc $\{a_n\}$ jest też rosnący (bo odejmowany ułamek maleje) oraz $a_n \leq \frac{1}{3}$. Oczywiście, skoro $\{a_n\}$ jest rosnący, to także

$$a_n \geq a_1 = \frac{1 + 2 - 2}{3 + 6 - 1} = \frac{1}{8}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź funkcję odwrotną do

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}, \quad x \geq 0$$

(wraz z dziedziną).

Rozwiązanie: Zbiorem wartości funkcji f są wszystkie liczby $y \geq 1$, co łatwo zauważyć rozwiązując równanie

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \ \Rightarrow \ x = \sqrt{y^3 - 1}.$$

Jest to dziedzina funkcji odwrotnej: $D_{(f^{-1})} = \{x : x \geq 1\}$. To samo rozwiązane równanie daje nam wzór:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x^3 - 1}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sin(n^{3/2})}{\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 0,$$

oraz wiemy, że sinus jest ograniczony. Możemy więc skorzystać z tw. o 3 ciągach:

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n^{3/2})}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Wiemy, że oba skrajne ciągi są zbieżne do 0, a więc również ciąg w środku:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^{3/2})}{\sqrt{n}} = 0.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Znajdź granicę ciągu
$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$
Rozwiązanie: Stosujemy zwykła w takich sytuacjach technikę:
$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$
Mamy więc
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$