Egzamin końcowy - 1 termin
4.02.11

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n n!}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2b+1)}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3(1+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Szereg jest więc zbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Obszar pod wykresem linii łańcuchowej

$$y = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{4}, \quad -1 \le x \le 1,$$

obraca się wokół osi OX. Oblicz objętość powstałej bryły obrotowej.

Rozwiązanie: Podstawiamy do wzoru:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2} \right)^2 dx \\
&= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \left(e^x + 2 + e^{-x}\right) dx \\
&= \frac{\pi}{4} \left(e^x + 2x - e^{-x}\right) \Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{4} \left((e + 2 - \tfrac{1}{e}) - (\tfrac{1}{e} - 2 - e) \right) \\
&= \frac{\pi}{4} (2e + 4 - \tfrac{2}{e}) \\
&= \frac{\pi}{2} (e + 2 - \tfrac{1}{e})
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x)\, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x)\, dx &= e^{2x}\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x} \sin(x)\, dx \\ &= e^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} (\cos(x))'\, dx \\ &= e^{\pi} + 2\, e^{2x} \cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x)\, dx \\ &= e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x)\, dx.\end{aligned}$$

Mamy więc równanie:

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x)\, dx = e^{\pi} - 2,$$

czyli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x)\, dx = \frac{e^{\pi} - 2}{5}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

Rozwiązanie: Najpierw robimy dosyć oczywiste podstawienie:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \left\{ \begin{array}{c} y = e^x + 1 \\ {\scriptstyle dy = e^x dx = (y-1)dx} \\ {\scriptstyle \frac{dy}{y-1} = dx} \end{array} \right\} = \int \frac{dy}{y(y-1)}.$$

Rozkładamy

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y - A}{y(y-1)},$$

czyli $A = -1$ oraz $B = 1$, kontynuujemy całkę

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy \\ &= -\log|y| + \log|y-1| + C \\ &= \log \frac{e^x}{e^x + 1} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzamy:

$$\left(\log \frac{e^x}{e^x + 1} \right)' = \frac{1}{\frac{e^x}{e^x+1}} \cdot \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right).$$

Rozwiązanie: Sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}=\frac{x\log x-(x-1)}{(x-1)\log x}=\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}.$$

Gdy $x\to 1$ jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'Hôpitala:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x+1-1}{\log x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\log x+1-\frac{1}{x}}.$$

W dalszym ciągu jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'Hôpitala ponownie:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\log x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Mamy więc:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\frac{1}{2}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy regułę łańcuchową:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' \\
&= e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \\
&= \frac{1}{2} \cdot e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \\
&= -e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Dla jakich wartości parametrów a, b podana funkcja jest ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & : \quad x<0 \\ 2\cos x + a & : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ a\,x+b & : \quad \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}.$$

Rozwiązanie: Żeby funkcja była ciągła w punktach sklejenia, to granice jednostronne muszą się zgadzać. Obliczamy więc granice jednostronne w punktach sklejenia.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0}(x+4) = 4, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0}(2\cos x + a) = 2+a, \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(2\cos x + a) = a, \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(ax+b) = a\frac{\pi}{2} + b. \end{aligned}$$

Mamy więc:

$$2+a = 4 \;\Rightarrow\; a = 2,$$

$$a = a\frac{\pi}{2} + b \;\Rightarrow\; 2 = \pi + b \;\Rightarrow\; b = 2 - \pi.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji w podanym przedziale:

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|, \qquad [-10, 10].$$

Rozwiązanie: Pamiętamy, że wartości najmniejsza i największa są przyjęte albo na końcach przedziału, albo w punktach nieróżniczkowalności albo w punktach gdzie pochodna jest zerem. Sprawdzamy po kolei te punkty

$$f(-10) = |100 + 30 + 2| = 132,$$
$$f(10) = |100 - 30 + 2| = 72.$$

Zauważmy, że $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. W punktach $x = 1$ i $x = 2$ wyrażenie kwadratowe zmienia znak, a więc funkcja f może być nieróżniczkowalna. We wszystkich innych punktach jest różniczkowalna. Wartość f w tych punktach to 0:

$$f(1) = f(2) = 0.$$

Poszukajmy teraz zer pochodnej. Jeżeli $x < 1$ lub $x > 2$ to $f(x) = x^2 - 3x + 2$ czyli

$$f'(x) = 2x - 3 \quad \text{czyli} \quad f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Punkt ten leży poza rozważanym zakresem x.

Jeżeli $1 < x < 2$ to $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, czyli

$$f'(x) = -2x + 3 \quad \text{czyli} \quad f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Punkt $x = \frac{3}{2}$ jest więc jedynym zerem pochodnej.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left|\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2\right| = \left|\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4}\right| = \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4}.$$

Widzimy, że wartość największa f to 132 przyjęta w $x = -10$, a wartość najmniejsza to 0 przyjęte w $x = 1$ oraz $x = 2$.