

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 8

25.11.13

- (1) Niech  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ . Korzystając z definicji oblicz  $f'(8)$ .
- (2) Niech  $f(x) = x^5$ . Korzystając z definicji wyprowadź wzór na  $f'(x)$ .
- (3) Niech  $n \in \mathbf{N}$ . Dobierz stałe  $a, b, c$  tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & : |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & : |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Oblicz pochodną  $f'_n(x)$ , naszkicuj wykres funkcji  $f_n(x)$  oraz wykres pochodnej.

- (4) Oblicz pochodną następujących funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

- |   |   |
|---|---|
| <p>(a) <math>f(x) = 3x^2 - 5x + 1</math>,</p> <p>(c) <math>f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}</math>,</p> <p>(e) <math>f(x) = (x^2 + 1)^4</math>,</p> <p>(g) <math>f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}</math>,</p> <p>(i) <math>f(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{1/3}</math>,</p> <p>(k) <math>f(x) = 2^{x+3}</math>,</p> <p>(m) <math>f(x) = \frac{x}{e^x}</math>,</p> <p>(o) <math>f(x) = e^x \log x</math>,</p> <p>(q) <math>f(x) = e^{x^2}</math>,</p> <p>(s) <math>f(x) = e^{e^x}</math>,</p> <p>(u) <math>f(x) = \log_{10}(x - 1)</math>,</p> <p>(w) <math>f(x) = 2^{3^x}</math>,</p> <p>(y) <math>f(x) = e^{\sqrt{\log x}}</math>,</p> <p>(aa) <math>f(x) = x^{x^x}</math>,</p> <p>(ac) <math>f(x) = (\log x)^x</math>,</p> <p>(ae) <math>f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}</math>,</p> <p>(ag) <math>f(x) = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)</math>,</p> <p>(ai) <math>f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}</math>,</p> <p>(ak) <math>f(x) = \operatorname{sgn} x</math>,</p> <p>(am) <math>f(x) = e^{- x }</math>,</p> | <p>(b) <math>f(x) = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)</math>,</p> <p>(d) <math>f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4})</math>,</p> <p>(f) <math>f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}</math>,</p> <p>(h) <math>f(x) = (1 + 2x)^{30}</math>,</p> <p>(j) <math>f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}</math>,</p> <p>(l) <math>f(x) = x10^x</math>,</p> <p>(n) <math>f(x) = x^2(x + 1)e^x</math>,</p> <p>(p) <math>f(x) = \frac{\log x}{e^x}</math>,</p> <p>(r) <math>f(x) = x^{10} \log x</math>,</p> <p>(t) <math>f(x) = \log \log x</math>,</p> <p>(v) <math>f(x) = 10^{2x-3}</math>,</p> <p>(x) <math>f(x) = \log_2  \log_3(\log_5 x) </math>,</p> <p>(z) <math>f(x) = x^{x^2}</math>,</p> <p>(ab) <math>f(x) = x^{\sqrt{x}}</math>,</p> <p>(ad) <math>f(x) = e^{-x^2} \log x</math>,</p> <p>(af) <math>f(x) = x^5(x^6 - 8)^{1/3}</math>,</p> <p>(ah) <math>f(x) = \log \frac{1}{1 + x}</math>,</p> <p>(aj) <math>f(x) =  x ^3</math>,</p> <p>(al) <math>f(x) = \begin{cases} 0 &amp; \text{dla } x &lt; 0, \\ x^2 &amp; \text{dla } x \geq 0 \end{cases}</math>,</p> <p>(an) <math>f(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x^2} - 1}</math>,</p> |
|---|---|

$$\begin{array}{ll}
(\text{ao}) & f(x) = \{x\}, \\
(\text{ap}) & f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases} \\
(\text{aq}) & f(x) = \operatorname{sgn}(x^5 - x^3), \\
(\text{ar}) & f(x) = \frac{\pi^{10}}{\pi - e}, \\
(\text{as}) & f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < 0, \\ 1 + x & \text{dla } x \geq 0, \end{cases} \\
(\text{at}) & f(x) = x^7 + e^2, \\
(\text{au}) & f(x) = (x + e)^{20}, \\
(\text{av}) & f(x) = e^e.
\end{array}$$

- (5) Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?

- (6) Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:

$$\begin{array}{ll}
(\text{a}) & f(x) = x^2 + 2x + 21, \quad [-2, 7], \\
(\text{b}) & f(x) = |x^2 - 1| + 3x, \quad [-2, 2], \\
(\text{c}) & f(x) = |x + 1| + x^2, \quad [-10, 10], \\
(\text{d}) & f(x) = |10x - 1| + x^3, \quad [0, 1], \\
(\text{e}) & f(x) = \log(x) - \frac{x}{10}, \quad [1, e^3], \\
(\text{f}) & f(x) = |\sin(x)| + \frac{x}{2}, \quad [0, 2\pi], \\
(\text{g}) & f(x) = x^{1/x}, \quad [2, 4], \\
(\text{h}) & f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x), \quad [0, 2\pi].
\end{array}$$

- (7) Oblicz granice:

$$\begin{array}{ll}
(\text{a}) & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right), \\
(\text{b}) & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}, \\
(\text{c}) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}, \\
(\text{d}) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x) + x^2 - 2}{x\sin(x) - x^2}, \\
(\text{e}) & \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x}, \\
(\text{f}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x}, \\
(\text{g}) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \\
(\text{h}) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}, \\
(\text{i}) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \\
(\text{j}) & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x - 1}, \\
(\text{k}) & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - x + 1}{(x - 1)^2}, \\
(\text{l}) & \lim_{x \rightarrow e} \frac{\log \log(x)}{x - e}, \\
(\text{m}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}, \\
(\text{n}) & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}.
\end{array}$$