Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 2
1.12.17

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\tan 2x}{\tan(\pi/4+x)}.$$

Rozwiązanie: To jest wyrażenie postaci $\frac{\infty}{\infty}$ w $\frac{\pi}{4}$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\tan 2x}{\tan(\pi/4+x)} \overset{\text{d l'H}}{=} \lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\frac{1}{\cos^2(\pi/4+x)}} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{2\cos^2(\pi/4+x)}{\cos^2 2x}.$$

Ostatnia granica to wyrażenie postaci $\frac{0}{0}$ w $\frac{\pi}{4}$, więc stosujemy de l'Hospitala ponownie:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/4} \frac{2\cos^2(\pi/4+x)}{\cos^2 2x} &\overset{\text{d l'H}}{=} \lim_{x\to\pi/4} \frac{-4\cos(\pi/4+x)\sin(\pi/4+x)}{2\cos 2x(-\sin 2x)\cdot 2} \\
&= \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos(\pi/4+x)\sin(\pi/4+x)}{\cos 2x \sin 2x} \\
&= \lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin(\pi/2+2x)}{\sin 4x} \\
&\overset{\text{d l'H}}{=} \lim_{x\to\pi/4} \frac{2\cos(\pi/2+2x)}{4\cos 4x} \\
&= \frac{\cos\pi}{2\cos\pi} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n}.$$

Rozwiązanie: Ustalamy x i stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{x^{2(n+1)}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}-(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{x^{2n}} \right| = \\
&\qquad = |x|^2 \frac{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}+(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&\qquad = |x|^2 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3n+2}+(n+1)}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&\qquad = |x|^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&\qquad \to |x|^2.
\end{aligned}$$

Szereg jest więc zbieżny bądź rozbieżny w zależności od tego, czy $|x| < 1$ czy $|x| > 1$. Promień zbieżności wynosi więc 1.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym przedziale

$$f(x) = \sin 2x - x, \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartości na końcach przedziału:

$$f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \sin(-\pi) - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2},$$
$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \sin\pi - \Big(\frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{\pi}{2}.$$

Szukamy punktów krytycznych:

$$f'(x) = 2\cos 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6},$$
$$f\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \simeq 0,85 - 0,52 = 0,33,$$
$$f\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \simeq -0,33.$$

Widzimy więc, że wartość największa to $\frac{\pi}{2}$ (przyjęta w $-\frac{\pi}{2}$), a wartość najmniejsza to $-\frac{\pi}{2}$ (przyjęta w $\frac{\pi}{2}$).

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Dobierz parametry a, b tak, żeby podana funkcja miała pochodną w punkcie 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \leq 1, \\ ax + b & : \quad x > 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie: f musi być ciągła w 1:

$$1 = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} ax + b = a + b.$$

Mamy więc $1 = a + b$. Wiemy (z reguły de l'Hospitala na przykład), że f w punkcie sklejenia (jeżeli jest ciągła) ma pochodną $\Leftrightarrow$ granice pochodnych z obu stron w tym punkcie się zgadzają.

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2, \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1} a = a.$$

Mamy więc dodatkowo $a = 2$. Łącząc to z poprzednim równaniem $b = -1$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz pochodną podanej funkcji (i podaj dziedzinę pochodnej):

$$f(x) = e^{\sqrt{\log|x|}}.$$

Rozwiązanie: Dziedziną f są liczby $|x| \geq 1$ i dziedziną pochodnej są liczby $|x| > 1$, gdyż wszystkie funkcje składowe są różniczkowalne na odpowiednich zbiorach: $\log|x|$ na $|x| > 1$, $\sqrt{x}$ na $x > 0$, e^x wszędzie. Liczymy pochodną:

$$f'(x) = e^{\sqrt{\log|x|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log|x|}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkty ciągłości i nieciągłości funkcji:

$$f(x) = \{\log_{10} x\}, \qquad (\{\dots\} \text{ - część ułamkowa}).$$

Rozwiązanie: Dziedziną f są liczby $x > 0$. $\log_{10} x$ jest ciągła wszędzie, a $\{x\}$ jest ciągła na przedziałach $(k, k+1)$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, i nieciągła we wszystkich punktach całkowitych. Z ciągłości funkcji złożonej wiemy, że f jest ciągła we wszystkich punktach x takich, że $\log_{10} x \notin \mathbb{Z}$. Czyli we wszystkich punktach, które nie są całkowitą potęgą 10. Rozważmy teraz punkty postaci 10^k, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to 10^{k-}} \{\log_{10} x\} = \lim_{t \to k^-} \{t\} = 1,$$
$$\lim_{x \to 10^{k+}} \{\log_{10} x\} = \lim_{t \to k^+} \{t\} = 0.$$

W punktach postaci 10^k, $k \in \mathbb{Z}$ f jest więc nieciągła. W pozostałych punktach jest ciągła.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność i ew. zbieżność absolutną szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n}.$$

Rozwiązanie: To jest szereg naprzemienny, więc chcemy skorzystać z kryterium Leibniza. Potrzebujemy:

$$\begin{aligned}
\frac{\log n}{n} &\geq \frac{\log(n+1)}{n+1} \\
\frac{\log(n+1)}{\log n} &\leq \frac{n+1}{n} \\
\log_n(n+1) &\leq 1+\frac{1}{n} \\
n+1 &\leq n^{1+\frac{1}{n}} \\
1+\frac{1}{n} &\leq n^{\frac{1}{n}} \\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq n.
\end{aligned}$$

Wszystkie powyższe nierówności są równoważne, a ostatnia jest prawdziwa dla $n \geq 3$, bo wiemy, że $(1+\frac{1}{n})^n$ rośnie do $e < 3$. Na mocy kryterium Leibniza szereg jest więc zbieżny. Nie jest zbiezny absolutnie, bo

$$\left|(-1)^n \frac{\log n}{n}\right| = \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \geq 3,$$

a szereg o wyrazach $\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.