Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 1
25.11.16

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3-2} + \frac{n^2-3}{n^3+3} + \cdots + \frac{n^2+(-1)^n n}{n^3-(-1)^n n}.$$

Rozwiązanie: Mamy:

$$\frac{n^2-1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3-2} + \frac{n^2-3}{n^3+3} + \cdots + \frac{n^2+(-1)^n n}{n^3-(-1)^n n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+(-1)^k k}{n^3-(-1)^k k}$$
$$\leq n \cdot \frac{n^2+n}{n^3-n} = \frac{n^3+n^2}{n^3-n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Z drugiej strony,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+(-1)^k k}{n^3-(-1)^k k} \geq n \cdot \frac{n^2-n}{n^3+n} = \frac{n^3-n^2}{n^3+n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Z 3 ciągów mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3-2} + \frac{n^2-3}{n^3+3} + \cdots + \frac{n^2+(-1)^n n}{n^3-(-1)^n n} = 1.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\,\ldots\,\sqrt[2^n]{2}\right).$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\,\ldots\,\sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}.$$

Ponieważ funkcja 2^x jest ciągła, więc

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{\lim\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}.$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Ostatecznie,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\,\ldots\,\sqrt[2^n]{2}\right) = 2^1 = 2.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!} + \ldots .$$

Rozwiązanie: Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}} = \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2n+1}{3n+3} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{3}.$$

Szereg jest więc zbieżny.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność, i ewentualnie zbieżność absolutną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{2^n}.$$

Rozwiązanie: Badamy zbieżność absolutną, korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Szereg jest więc zbieżny absolutnie.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź parametry a, b dla których podana funkcja jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} x & : \ |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & : \ |x| > 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Są dwa punkty sklejenia, ± 1. Liczymy granice jednostronne w obu punktach.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} x^2 + ax + b = 1 - a + b, \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} x = -1, \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} x = 1, \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b. \end{aligned}$$

Powstały układ równań

$$\begin{aligned} 1 - a + b &= -1, \\ 1 &= 1 + a + b, \end{aligned}$$

łatwo rozwiązać, otrzymujemy $a = 1$, $b = -1$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę:

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\big(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\big).$$

Rozwiązanie: Stosujemy znany trick:

$$\begin{aligned}
x^{3/2}\big(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\big) &= x^{3/2}\,\frac{\big(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\big)\cdot\big(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\big)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} \\
&= \frac{2\cdot x^{3/2}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} \\
&= \frac{2\cdot x^{3/2}}{x^{3/2}\big(\sqrt{1+x^{-3}}+\sqrt{1-x^{-3}}\big)} \ \xrightarrow{x\to\infty}\ 1.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Udowodnij, że jeżeli funkcja f jest ciągła, to funkcja

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0 \\ 0 & : f(x) < 0 \end{cases}$$

też jest ciągła.

Rozwiązanie: Można zauważyć, że mamy $\tilde{f} = g \circ f$, gdzie funkcja g dana jest wzorem:

$$g(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0. \end{cases}$$

Funkcja g jest ciągła, więc $\tilde{f}$ też jest ciągła, jako złożenie funkcji ciągłych.