Pierwsza litera nazwiska

Egzamin końcowy
1.02.2018

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |\sin(x)| + \frac{x}{2}, \quad [0, 2\pi].$$

Rozwiązanie: Te wartości mogą być przyjęte na końcach przedziału (0, 2π), w punktach, w których f nie jest różniczkowalna (czyli tam, gdzie $\sin x = 0$, czyli π), lub w punktach w których $f'(x) = 0$. Mamy, dla $x \in (0, \pi)$: $f(x) = \sin(x) + x/2 \Rightarrow f'(x) = \cos(x) + 1/2$, czyli $x = 2\pi/3$. Dla $x \in (\pi, 2\pi)$ $f(x) = -\sin(x) + x/2 \Rightarrow f'(x) = -\cos(x) + 1/2$, czyli $x = 5\pi/3$. Obliczamy wartości we wszystkich „podejrzanych" punktach: $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi/2$, $f(2\pi) = \pi$, $f(2\pi/3) = \sqrt{3}/2 + \pi/2$, $f(5\pi/3) = \sqrt{3}/2 + 5\pi/6$. Widać, że spośród powyższych wartości najmniejsza to 0 (przyjęta w 0), a największa to $\sqrt{3}/2+5\pi/6$ (przyjęta w $5\pi/3$).

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:

$$y = \frac{1}{x^2}, \qquad y = \frac{1}{x^3}, \qquad x = 2.$$

Rozwiązanie: Wykresy $y = \frac{1}{x^2}$ i $y = \frac{1}{y^3}$ przecinają się w jedynym punkcie $(1, 1)$, więc figura znajduje się powyżej przedziału $1 \le x \le 2$. Na tym przedziale $1/x^2 \ge 1/x^3$, więc

$$P = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2 - \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^2 = -\ \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} -\ \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź punkt przecięcia stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ odpowiednio w punktach $(-1, -1)$ i $(2, 8)$.

Rozwiązanie: Równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie (x_0, y_0) ma postać:

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Mamy $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$. Styczne mają więc równania odpowiednio:

$$y + 1 = 3\,(x+1) \;\Rightarrow\; y = 3x + 2,$$
$$y - 8 = 12\,(x-2) \;\Rightarrow\; y = 12x - 16.$$

Podstawiając otrzymujemy punkt przecięcia $(x, y) = (2, 8)$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x\,(\log^3 x + 1)},$$

(uwaga: log to logarytm naturalny).

Rozwiązanie: Podstawiamy:

$$\int \frac{dx}{x\,(\log^3 x + 1)} = \left\{ \begin{matrix} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{dt}{t^3+1}.$$

Rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} - \frac{1}{6}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2-t+1}.$$

Całkujemy:

$$\int \frac{dt}{t+1} = \log|t+1| = \log|\log x + 1|,$$

$$\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt = \left\{ \begin{matrix} s = t^2 - t + 1 \\ ds = 2t - 1\,dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{ds}{s} = \log|s| = \log(t^2 - t + 1) = \log(\log^2 x - \log x + 1),$$

$$\int \frac{dt}{t^2-t+1} = \int \frac{2t-1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,dt = \left\{ \begin{matrix} s = \frac{2}{\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,ds = dt \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{ds}{s^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan s = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\log x - \frac{1}{2}\Big).$$

Wstawiając te 3 całki do rozkładu wyjściowej całki otrzymujemy wynik.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Niech funkcja $f(x)$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{x} & : \text{ dla } x \neq 0 \\ -1 & : \text{ dla } x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że f jest ciągła w 0:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = \left(e^{-x}\right)'(0) = -1 = f(0).$$

Pamiętamy, że w tym przypadku (z de l'Hospitala) $f'(0)$ jest równa granicy $\lim_{x\to 0} f'(x)$ (jeżeli ta granica istnieje).

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}\,x - (e^{-x}-1)}{x^2} = \frac{-e^{-x}\,x - e^{-x} + 1}{x^2}.$$

To jest $\frac{0}{0}$ w $x = 0$, więc

$$\lim_{x\to 0} f'(x) \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Obszar pod wykresem funkcji

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad |x| \leq 2,$$

obraca się wokół osi OX. Oblicz pole powierzchni bocznej powstałej bryły obrotowej.

Rozwiązanie: Przypominamy odpowiedni wzór:

$$S = 2\pi \int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Mamy $f'(x) = -x/\sqrt{9 - x^2}$, więc

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{9 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{9 - x^2}\sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}\, dx \\ &= 6\pi \int_{-2}^{2}\, dx \\ &= 24\,\pi. \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_0^\infty x^3\, e^{-2x}\, dx.$$

Rozwiązanie: Funkcja podcałkowa jest ciągła na całej prostej, więc niewłaściwość całki jest związana wyłącznie z nieskończonym przedziałem całkowania. Liczymy:

$$\begin{aligned}
\int_0^M x^3 e^{-2x}\, dx &= \int_0^M x^3 \Big(\frac{e^{-2x}}{-2}\Big)'\, dx \\
&= \frac{x^3 e^{-2x}}{-2}\Big|_0^M + \frac{3}{2}\int_0^M x^2 e^{-2x}\, dx \\
&= \frac{M^3 e^{-2M}}{-2} + \frac{3}{2}\int_0^M x^2 \Big(\frac{e^{-2x}}{-2}\Big)'\, dx \\
&= \frac{M^3 e^{-2M}}{-2} - \frac{3}{4}x^2 e^{-2x}\Big|_0^M + \frac{3}{2}\int_0^M x e^{-2x}\, dx \\
&= \frac{(-2M^3 - 3M^2)e^{-2M}}{4} + \frac{3}{2}\int_0^M x \Big(\frac{e^{-2x}}{-2}\Big)'\, dx \\
&= \frac{(-2M^3 - 3M^2)e^{-2M}}{4} - \frac{3}{4}x e^{-2x}\Big|_0^M + \frac{3}{4}\int_0^M e^{-2x}\, dx \\
&= \frac{(-2M^3 - 3M^2 - 3M)e^{-2M}}{4} - \frac{3}{8}e^{-2x}\Big|_0^M \\
&= \frac{(-4M^3 - 6M^2 - 6M - 3)e^{-2M}}{8} + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Pierwszy ułamek ma granicę gdy $M \to \infty$ (np. z de l'Hospitala), równą 0, więc całka niewłaściwa istnieje, i

$$\int_0^\infty x^3\, e^{-2x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M x^3\, e^{-2x}\, dx = \frac{3}{8}.$$