ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 9

2.12.13

(1) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1} & : \quad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(2) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & : \quad x \notin \mathbf{Z}, \\ x^2 - 2x & : \quad x = \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(3) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{7x}-1}{x} & : \quad x \neq 0, \\ 7 & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

(4) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{\sin(\pi x)} & : \quad x \notin \mathbf{Z}, \\ x^3 - x & : \quad x \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbf{Z}$, dla których istnieje.

(5) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & : \quad x \neq 0, \\ A & : \quad x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(6) Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji f danej wzorem:

(a) $(x+1)^6$, (b) $x^6 - 4x^3 + 4$, (c) $\dfrac{1}{1-x}$,
(d) $x^3 \log x$, (e) e^{2x-1}; (f) $(x^2+1)^3$,
(g) e^{x^2}, (h) $\log(x^2)$, (i) $(x-7)^{50}$.

(7) Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji f danej wzorem:

(a) $\log(x^{10})$, (b) $x\log(x)$, (c) $\sqrt{x}$,
(d) $\sin^2(x)$, (e) $\dfrac{1-x}{1+x}$, (f) xe^x,
(g) $\sin(5x)$, (h) x^7, (i) e^{4x},
(j) $x + \dfrac{1}{x}$, (k) $x^2 e^{-x}$.

(8) Udowodnij, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(9) Oblicz przybliżone wartości następujących liczb korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

(a) $\sqrt{24}$, (b) $\sqrt[3]{126}$, (c) $\sqrt[7]{126}$,
(d) $\sin(\frac{1}{10})$, (e) $\arctan(\frac{1}{10})$, (f) $\sqrt{50}$.