Kolokwium 2
4.12.09

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź granicę:

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\{x\} - (\{x\})^2\right),$$

($\{x\}$ oznacza część ułamkową x).

Rozwiązanie: Obliczając powyższą granicę możemy ograniczyć się do x leżących w przedziale $[0, 1)$. Takie x mają część całkowitą równą 0, a więc $\{x\} = x$. Teraz już łatwo:

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\{x\} - (\{x\})^2\right) = \lim_{x\to 1^-} \left(x - x^2\right) = 1 - 1^2 = 0.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Wyznacz parametry a i b dla których podana poniżej funkcja jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & : \quad x < 0, \\ b + ax - x^2 & : \quad 0 \le x \le 3, \\ x - 3 & : \quad x \ge 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Wiemy, że wielomiany są ciągłe wszędzie, więc ciągłość powyższej funkcji zależy tylko od ciągłości w punktach „sklejenia": 0 i 3. Obliczamy więc granice jednostronne w tych punktach, co jest łatwe, gdyż, powtórzmy to jeszcze raz: granica wielomianu, jednostronna lub zwykła, jest równa jego wartości w danym punkcie.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 3 = 3,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (b + a\,x - x^2) = b,$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (b + a\,x - x^2) = b + 3\,a - 9,$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x - 3) = 0.$$

Ponieważ granice jednostronne mają być równe, więc otrzymujemy równania: $b = 3$ oraz

$$b + 3a - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a = 9 - 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Zauważmy jeszcze, że wartości funkcji w punktach 0 i 3 zgadzają się z tymi granicami.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2\,n}}.$$

Rozwiązanie: Szereg wygląda na rozbieżny, gdyż dominującą potęgą n w mianowniku jest 1. Spróbujmy więc oszacować go od dołu przez szereg rozbieżny, i skorzystać z kryterium porównawczego.

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2\,n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2\,n^2}} = \frac{1}{n\,\sqrt{3}}.$$

Szereg o wyrazach $\frac{1}{n\,\sqrt{3}}$ jest rozbieżny, gdyż jest to stała razy szereg harmoniczny, który wiemy, że jest rozbieżny.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n\, x^n}{n^{10}}.$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z kryterium d'Alemberta dla szeregu o wyrazach $a_n = \frac{10^n\, x^n}{n^{10}}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{10^{n+1}\, x^{n+1}}{(n+1)^{10}} \cdot \frac{n^{10}}{10^n\, x^n}\right| \\
&= |x|\, 10 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{10} \\
&= |x|\, 10 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{10} \\
&\to 10|x|.
\end{aligned}$$

Warunek zbieżności to $10|x| < 1$ a rozbieżności to $10|x| > 1$, więc promień zbieżności wynosi $\frac{1}{10}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru na pochodną ilorazu:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}\right)' &= \frac{(x^2 + 2x + 3)'(x + 2) - (x^2 + 2x + 3)(x + 2)'}{(x + 2)^2} \\
&= \frac{(2x + 2)(x + 2) - (x^2 + 2x + 3)}{(x + 2)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 6x + 4 - x^2 - 2x - 3}{(x + 2)^2} \\
&= \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}.
\end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to 0}\Big(x\cdot \cos\big(\frac{1}{x}\big)\Big).$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$-|x| \leq x\cdot \cos\big(\frac{1}{x}\big) \leq |x|,$$

a skoro $|x| \to 0$ gdy $x \to 0$, więc z twierdzenia o 3 funkcjach mamy

$$\lim_{x\to 0}\Big(x\cdot \cos\big(\frac{1}{x}\big)\Big) = 0.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^3+125}{2\,x^2-50}.$$

Rozwiązanie:

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^3+125}{2\,x^2-50} = \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)(x^2-5x+25)}{2(x-5)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to -5} \frac{x^2-5x+25}{2(x-5)} = \frac{25+25+25}{2(-10)} = -\frac{15}{4}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Wyznacz parametry a i b dla których podana poniżej funkcja jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} -a\,x + b & : \quad x < -1, \\ 3 - x^2 & : \quad -1 \leq x \leq 2, \\ a\,x + b & : \quad x > 2. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Podobnie jak w zadaniu 2 ciągłość funkcji zależy tylko od ciągłości w punktach „sklejenia" -1 i 2 obliczamy więc granice jednostronne, które są wartościami funkcji, w postaci po właściwej stronie.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-a\,x + b) = a + b,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (3 - x^2) = 3 - (-1)^2 = 2,$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3 - x^2) = 3 - 2^2 = -1,$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a\,x + b) = 2a + b$$

Mamy więc dwa równania:

$$\begin{cases} a + b & = 2, \\ 2a + b & = -1. \end{cases}$$

Wynika stąd, że $a = -3$ i $b = 5$.