Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 2 termin
15.02.16

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę:

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx &= \left\{ \begin{matrix} t = \sqrt{e^x - 1} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} \cdot e^x\, dx \\ \dfrac{2\,t\,dt}{t^2+1} = dx \end{matrix} \right\} \\
&= \int_0^1 \frac{2\,t^2}{t^2+1}\, dt \\
&= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \\
&= 2\,(t - \arctan t)\Big|_0^1 \\
&= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - 2\left(0 - 0\right) \\
&= 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz pole figury, ograniczonej krzywymi:

$$y = \frac{1}{x^2+1}, \qquad y = \frac{x^2}{2}.$$

Rozwiązanie: Szukamy punktów przecięcia krzywych:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}$$
$$2 = x^4 + x^2, \qquad t = x^2$$
$$t^2 + t - 2 = 0$$
$$(t+2)(t-1) = 0$$
$$t = 1 \vee t = -2,$$

czyli $t = x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Nasza figura mieści się zatem powyżej odcinka $[-1, 1]$, a na tym odcinku $\frac{1}{x^2+1} \geq \frac{x^2}{2}$, a więc

$$\begin{aligned}
\text{Pole} &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \left(\arctan x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2\left(\arctan 1 - \frac{1}{6}\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź długość wykresu funkcji $f(x) = \log x$ nad odcinkiem $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.
Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt{1+x^2} \\ dt = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\ \dfrac{t\, dt}{t^2-1} = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right\} \\
&= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\, dt \\
&= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt \\
&= \int_2^3 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right) dt \\
&= \left(t + \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1|\right)\Big|_2^3 \\
&= 3 + \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 4 - 2 - \frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{2}\log 3 \\
&= 1 + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3} \\
&= 1 + \log\sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność następującej całki niewłaściwej, i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx, \qquad \Big(\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}\Big).$$

Rozwiązanie: Jedyną niewłaściwością tej całki jest fakt, że funkcja $\cot x$ nie jest ograniczona w otoczeniu lewego końca przedziału: $\lim_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx &= \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\
&= \left\{ \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{matrix} \right\} \\
&= \int_{\sin\epsilon}^1 \frac{dt}{t} \\
&= \log|t| \Big|_{\sin\epsilon}^1 \\
&= -\log\sin\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} +\infty.
\end{aligned}$$

Całka ta nie jest więc zbieżna.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Udowodnij, że:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} \\ &= -\int_1^0 \frac{dt}{\arccos x} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\arccos x}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę:

$$\int \cos 5x \, \sin 3x \, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części 2-krotnie:

$$\begin{aligned}\int \cos 5x \, \sin 3x \, dx &= \int \left(\frac{\sin 5x}{5}\right)' \sin 3x \, dx \\ &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} - \frac{3}{5}\int \sin 5x \cos 3x \, dx \\ &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} - \frac{3}{5}\int \left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)' \cos 3x \, dx \\ &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} + \frac{3\cos 5x \cos 3x}{25} + \frac{9}{25}\int \cos 5x \, \sin 3x \, dx.\end{aligned}$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{9}{25}\right)\int \cos 5x \, \sin 3x \, dx &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} + \frac{3\cos 5x \cos 3x}{25} + C, \\ \int \cos 5x \, \sin 3x \, dx &= \frac{5\sin 5x \sin 3x + 3\cos 5x \cos 3x}{16} + C.\end{aligned}$$

Można inaczej, wiedząc że $\cos A \sin B = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2}$:

$$\begin{aligned}\int \cos 5x \, \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{\cos 8x}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos 2x}{2} + C \\ &= \frac{4\cos 2x - \cos 8x}{16} + C.\end{aligned}$$

Zauważmy, że obie odpowiedzi są równe

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź najmniejszą i największą wartość podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |10x - 1| + x^3, \qquad x \in [0, 1].$$

Rozwiązanie: Mamy końce: $f(0) = 1$, $f(1) = 10$, mamy punkt nieróżniczkowalności $f(\frac{1}{10}) = \frac{1}{1000}$. Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

$$\begin{aligned} x \in \left[0, \frac{1}{10}\right] &\Rightarrow f(x) = 1 - 10x + x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10 \\ &\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}, \text{ poza przedziałem,} \\ x \in \left[\frac{1}{10}, 1\right] &\Rightarrow f(x) = 10x - 1 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 10 + 3x^2 \\ &\Rightarrow \text{ pochodna nigdzie się nie zeruje} \end{aligned}$$

Mamy więc wartość najmniejszą $\frac{1}{1000}$ osiągniętą w $\frac{1}{10}$ i wartość największą 10 osiągniętą w 1.