Zadanie 1. Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > 1.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że $2x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$, oraz $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$. Rozważamy więc 3 przypadki:

(a) $x<-3$, wtedy $2x-5<0$ i $x+3<0$, a więc

$$\begin{gathered}\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > 1\\ |2x-5| > |x+3|\\ -2x+5 > -x-3\\ 8 > x.\end{gathered}$$

W tym przypadku wszystkie $x<-3$ należą więc do zbioru rozwiązań.

(b) $-3<x<\frac{5}{2}$, wtedy $2x-5<0$ i $x+3>0$, a więc

$$\begin{gathered}\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > 1\\ |2x-5| > |x+3|\\ -2x+5 > x+3\\ \frac{2}{3} > x.\end{gathered}$$

W tym przypadku do zbioru rozwiązań należą x takie, że $-3<x<\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{5}{2}\leq x$, wtedy $2x-5\geq 0$ i $x+3>0$, a więc

$$\begin{gathered}\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > 1\\ |2x-5| > |x+3|\\ 2x-5 > x+3\\ x > 8.\end{gathered}$$

W tym przypadku do zbioru rozwiązań dochodzi $(8,+\infty)$.

Podsumowując, rozwiązaniem jest zbiór $(-\infty,-3)\cup(-3,\frac{2}{3})\cup(8,\infty)$.

Zadanie 2. Udowodnij, że

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Rozwiązanie: Dowód indukcyjny. Podstawiając $n = 1$ równość przyjmuje postać

$$1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2,$$

czyli równość jest spełniona. Załóżmy

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

i podstawmy do

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4(n+1)\big) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4n + 4\big) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

czyli udowodniliśmy równość dla $n + 1$, czyli krok indukcyjny został udowodniony.

Zadanie 3. Wykonaj następujące działanie, i przedstaw wynik w postaci $a + b\,i$:

$$\frac{4 - 3\,i}{4 + 3\,i}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\frac{4 - 3\,i}{4 + 3\,i} &= \frac{(4 - 3\,i)(4 - 3\,i)}{(4 + 3\,i)(4 - 3\,i)} \\
&= \frac{16 - 9 - 12\,i - 12\,i}{16 + 9} \\
&= \frac{7}{25} - \frac{24}{25}\,i.
\end{aligned}$$

Zadanie 4. Znajdź wszystkie pierwiastki zespolone 3 stopnia liczby -8.

Rozwiązanie: Przedstawmy -8 w postaci trygonometrycznej:

$$-8 = 8\,(-1 + 0\,i) = 8\,(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Zgodnie ze wzorami z wykładu wszystkie pierwiastki dane są wzorami

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},\\
w_1 &= 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = 2\big(-1 + i\,0\big) = -2,\\
w_2 &= 2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Zadanie 5. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}.$$

Rozwiązanie: Pamiętamy, że z granicą można „wejść pod pierwiastek”:

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2} = \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Zadanie 6. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$$

Rozwiązanie: Stosujemy zwykły „chłyt” z pozbywaniem się pierwiastków

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+2n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}{\sqrt{n^2+2n} + n} \\
&= \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} + n} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 + 2\frac{1}{n}} + 1} \\
&\xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1.
\end{aligned}$$

Zadanie 7. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z twierdzenia o 3 ciągach, i z tego, że $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n} \le \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \le \sqrt[n]{2\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \sqrt[n]{2}\,\frac{3}{4}.$$

Oba ciągi skrajne zbiegają do $\frac{3}{4}$ (lewy jest w ogóle stały), więc ciąg w środku też zbiega do $\frac{3}{4}$.

Zadanie 8. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \sin(n!) \cdot \frac{n}{n^2+1} + \frac{2n}{3n+1} \cdot \frac{n}{1-3n}.$$

Rozwiązanie: Zajmijmy się pierwszym składnikiem sumy. Korzystając z tego, że $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ mamy

$$-\frac{n}{n^2+1} \leq \sin(n!) \cdot \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}.$$

Ciągi skrajne mają wspólną granicę 0, gdyż

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

W takim razie,

$$\sin(n!) \cdot \frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Zajmijmy się drugim składnikiem sumy

$$\frac{2n}{3n+1} \cdot \frac{n}{1-3n} = \frac{2}{3+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}-3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{-3}.$$

W końcu, dodając te dwie granice, otrzymujemy

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 + \frac{-2}{9} = \frac{-2}{9}.$$