Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Rozwiązanie: Obliczamy granicę w $-\infty$, więc możemy założyć $x < 0$. Wtedy $|x| = -x$, i mamy

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x\to-\infty} -1.$$

Zadanie 2. Oblicz pochodną funkcji $f(x)$. Jaka jest dziedzina pochodnej?

$$f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3}$$

Rozwiązanie: Licznik i mianownik są różniczkowalne, więc dziedzina pochodnej to cała prosta z wyjątkiem punktów, gdzie mianownik jest $= 0$, czyli $x = -1$. Możemy skorzystać ze wzoru na różniczkowanie ilorazu. Dla $x \neq -1$ mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3x^2(1+x^3) - (1-x^3)\,3\,x^2}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{-3\,x^5 - 3\,x^2 - 3\,x^2 + 3\,x^5}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{-6\,x^2}{(1+x^3)^2}. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Oblicz pochodną funkcji $f(x)$. Jaka jest dziedzina pochodnej?

$$f(x) = 2^{3^x}$$

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej

$$f'(x) = 2^{3^x} \cdot \log 2 \cdot 3^x \cdot \log 3.$$

Zadanie 4. Dobrać stałe a, b tak, aby podana funkcja była ciągła.

$$f(x) = \begin{cases} b\,x + 3 & x < 1, \\ 2\,x^2 + x + a & x \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Mamy:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (b\,x + 3) = b + 3,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2\,x^2 + x + a) = 2 + 1 + a = 3 + a,$$

czyli jeżeli $f(x)$ ma być ciągła w 1 to musimy mieć $a = b$, na przykład $a = b = 0$. Oczywiście $f(x)$ jest ciągła we wszystkich innych punktach.

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Rozwiązanie: Stosujemy regułę de l'Hôspitala dwukrotnie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 6. Oblicz pochodną trzeciego rzędu funkcji $f(x)$.

$$f(x) = (1 + 2x)^{32}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \left(32\,(1 + 2\,x)^{31} \cdot 2\right)'' \\
&= \left(32 \cdot 31 \cdot (1 + 2\,x)^{30} \cdot 2 \cdot 2\right)' \\
&= 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot (1 + 2\,x)^{29} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
&= 238080 \cdot (1 + 2x)^{29}.
\end{aligned}$$

Zadanie 7. Dobierz stałe a, b tak, aby podana funkcja była ciągła.

$$f(x) = \begin{cases} b\,x & x < \pi, \\ \dfrac{\sin x}{a\,x} & x \geq \pi \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} b\,x = b\,\pi, \quad \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{a\,x} = \frac{0}{a\,\pi} = 0.$$

Widzimy więc, że musi być $b = 0$, natomiast a może być dowolne $\neq 0$.

Zadanie 8. Znajdź punkty przegięcia i przedziały wypukłości funkcji

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

Rozwiązanie:

$$f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 2 = 6\,x + 4.$$

Mamy więc $f''(x) > 0$ dla $x > -\frac{2}{3}$ i $f''(x) < 0$ dla $x < -\frac{2}{3}$. Funkcja jest więc wypukła na $(-\frac{2}{3}, \infty)$, wklęsła na $(-\infty, -\frac{2}{3})$, i ma punkt przegięcia w $-\frac{2}{3}$.

Zadanie 9. Oblicz pochodną funkcji $f(x)$

$$f(x) = e^{-x^2} \log x$$

Rozwiązanie:

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2\,x)\,\log x + e^{-x^2}\,\frac{1}{x} = e^{-x^2}\left(-2\,x\,\log x + \frac{1}{x}\right).$$

Zadanie 10. Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji $f(x)$

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

Rozwiązanie: Liczymy kolejno, po czym wywnioskowujemy wzór ogólny

$$f'(x) = 2\,x - \frac{2}{x^2},$$

$$f''(x) = 2 + \frac{2 \cdot 2}{x^3},$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{x^4},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}, \qquad n \geq 3. \tag{1}$$

Dowód wzoru ogólnego. Wzór zgadza się z obliczoną pochodną 3 rzędu dla $n = 3$, więc wystarczy wykonać krok indukcyjny. Różniczkujemy prawą stronę (1):

$$\begin{aligned}\left((-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}\right)' &= (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (-(n+1)) \cdot \frac{1}{x^{n+2}} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (n+1)! \cdot \frac{1}{x^{n+2}}.\end{aligned}$$

Ostatni wzór zgadza się z prawą stroną (1) dla $n + 1$.