Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 3
5.01.18

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Wyznacz maksima i minima podanej funkcji oraz punkty przegięcia jej wykresu:

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

Rozwiązanie: Liczymy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 \\ &= 5(x^2 - 4x + 3)\, x^2 \\ &= 5(x-3)(x-1)\, x^2. \end{aligned}$$

Są 3 punkty krytyczne: $0, 1, 3$. W 0 f' nie zmienia znaku (czyli nie ma ekstremum), w 1 zmienia z dodatniego na ujemny (maksimum) a w 3 zmienia znak z ujemnego na dodatni(minimum).

$$\begin{aligned} f''(x) &= 20x^3 - 60x^2 + 30x \\ &= 10x(2x^2 - 6x + 3). \end{aligned}$$

Są 3 miejsca zerowe $0, -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, i w każdym z nich f'' zmienia znak. Są to więc punkty przegięcia wykresu.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx &= \begin{Bmatrix} t = x+1 \\ dt = dz \end{Bmatrix} \\
&= \int \frac{t-2}{\sqrt[3]{t}}\,dt \\
&= \int \left(t^{\frac{2}{3}} - 2t^{-\frac{1}{3}}\right) dt \\
&= \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 2\,\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C \\
&= \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - 3(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx &= \left\{\begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{3}\,\arcsin t + C \\ &= \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \sqrt{x} \log x \, dx.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \log x \, dx &= \int \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' \log x \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx.$$

Rozwiązanie: Mamy $(x^2-6x+9)=(x-3)^2$, więc

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{(x-3)^2} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}\\ &= \frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}\\ &= \frac{Ax+B-3A}{(x-3)^2}.\end{aligned}$$

Stąd $A=2,\ B=5$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9}\,dx &= \int \frac{2}{x-3}\,dx+\int \frac{5}{(x-3)^2}\,dx\\ &= 2\log|x-3|+\frac{5}{-1}\,(x-3)^{-1}+C\\ &= \log(x-3)^2-\frac{5}{x-3}+C.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź asymptoty krzywej będącej wykresem funkcji

$$f(x) = xe^{\frac{2}{x}} + 1.$$

Rozwiązanie: Badamy zachowanie wokół $x = 0$ (ew. asymptota pionowa).

$$\lim_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{2}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\, e^{2t} = +\infty,$$

(z reguły de l'Hospitala). f ma więc asymptotę pionową $x = 0$. Badamy możliwe asymptoty w $\pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \big(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}\big) = 1.$$

Kandydatem na współczynnik kierunkowy, zarówno w $+\infty$ jak i $-\infty$, jest 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \big(x\, e^{\frac{2}{x}} + 1 - x\big) &= \lim_{x \to \pm\infty} x\, \big(x^{\frac{2}{x}} - 1\big) + 1 \\ &= \lim_{t \to 0^\pm} \frac{1}{t}\, \big(e^{2t} - 1\big) + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(z de l'Hospitala). f ma więc asymptoty $y = x + 3$ w $+\infty$ i w $-\infty$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz przybliżoną wartość podanego wyrażenia korzystając z 3 początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

$$\sqrt[3]{126}.$$

Rozwiązanie: $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 125.$

$$\begin{aligned} f(x_0+1) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,1^k + \frac{f'''(x_0+\theta)}{3!}\,1^3 \\ &= \frac{\sqrt[3]{125}}{0!} \cdot 1^0 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(\sqrt[3]{125})^2} \cdot \frac{1}{1!} \cdot 1^1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{125})^5} \cdot \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{125+\theta})^8} \cdot \frac{1}{3!} \cdot 1^3. \end{aligned}$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{126} &\simeq 5 + \frac{1}{3 \cdot 25} - \frac{1}{9 \cdot 5^5} \\ |\text{Błąd}| &\leq \frac{10}{27 \cdot 6} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{125+\theta})^8} x \leq \frac{5}{81} \cdot \frac{1}{5^8} = \frac{1}{81 \cdot 5^7}. \end{aligned}$$