Kolokwium 1
4.11.11

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Dla jakich $x \in \mathbf{R}$ zachodzi

$$\left|\frac{x+1}{x+2}\right| > 1?$$

Rozwiązanie: Najpierw zauważamy, że $x = -2$ nie jest rozwiązaniem nierówności, po czym mnożymy nierówność stronami przez $|x+2|$.Otrzymujemy nierówność

$$|x+2| < |x+1|.$$

Rozpatrujemy osobno przypadki:

(1) $x < -2$: W tym przypadku nierówność sprowadza się do $-x-2 < -x-1 \Leftrightarrow -2 < -1$, jest więc spełniona dla wszystkich x z tego zakresu.

(2) $-2 < x \leq -1$: Nierówność przyjmuje postać $x+2 < -x-1 \Leftrightarrow 2x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$. Z tego zakresu rozwiązaniem są więc $-2 < x < -\frac{3}{2}$.

(3) $x > -1$: Nierówność przyjmuje postać $x+2 < x+1 \Leftrightarrow 2 < 1$, a więc w tym zakresie nie ma rozwiązań.

Rozwiązaniem nierówności jest więc zbiór $\{x \in \mathbf{R} : x < -\frac{3}{2}, x \neq -2\}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź kresy zbioru A

$$A = \left\{ \frac{1}{x^4+1}; x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Rozwiązanie: Skoro $x^4 \geq 0$ więc od razu zauważamy, że zbiór A jest ograniczony od dołu przez 0 a od góry przez 1. Dodatkowo zauważamy, że $1 = \frac{1}{0^4+1} \in A$, czyli 1 jest ograniczeniem od góry, które jest jednocześnie elementem zbioru, a więc jest najmniejszym ograniczeniem od góry. Od razu mamy więc $\sup A = 1$. Z drugiej strony przypuśćmy, że jakieś $c > 0$ jest ograniczeniem A od dołu. Oznacza to, że dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ mamy $\frac{1}{x^4+1} \geq c$, czyli $x^4 + 1 \leq \frac{1}{c}$ (stąd wynika, że musi być $\frac{1}{c} \geq 1$), czyli $|x| \leq \sqrt[4]{\frac{1}{c} - 1}$. Jest to niemożliwe, bo wiemy na przykład, że wśród liczb rzeczywistych są liczby naturalne, które nie są wspólnie ograniczone. Widzimy więc, że żadna liczba $c > 0$ nie jest ograniczeniem A od dołu. 0 jest więc największym ograniczeniem A od dołu, czyli $\inf A = 0$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Wykonaj następujące działanie, i przedstaw wynik w postaci $a + b\,i$:

$$\frac{2-i}{2+3\,i}.$$

Rozwiązanie: Mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika:

$$\frac{2-i}{2+3\,i} = \frac{(2-i)(2-3\,i)}{2^2+3^2} = \frac{1-8\,i}{13} = \frac{1}{13} - \frac{8}{13}\,i.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}.$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z 3 ciągów. Zauważmy nierówności:

$$1 \leq \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \leq \sqrt[n]{n \cdot n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3.$$

Wiemy, że $\sqrt[n]{n} \to 1$, a więc również $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{n^2 + 2 \cdot 1}{2n^3 + 1 \cdot 1} + \frac{n^2 + 2 \cdot 2}{2n^3 + 2 \cdot 2} + \frac{n^2 + 2 \cdot 3}{2n^3 + 3 \cdot 3} + \cdots + \frac{n^2 + 2 \cdot n}{2n^3 + n^2}.$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z 3 ciągów. Zauważmy, że w sumie powyżej jest n składników. Ograniczenie każdego składnika od góry otrzymujemy przez powiększenie licznika i pomniejszenie mianownika, a ograniczenie od dołu odwrotnie, przez pomniejszenie licznika i powiększenie mianownika. Mamy wiec

$$n \cdot \frac{n^2}{2n^3 + n^2} \leq \frac{n^2 + 2 \cdot 1}{2n^3 + 1 \cdot 1} + \frac{n^2 + 2 \cdot 2}{2n^3 + 2 \cdot 2} + \frac{n^2 + 2 \cdot 3}{2n^3 + 3 \cdot 3} + \cdots + \frac{n^2 + 2 \cdot n}{2n^3 + n^2} \leq n \cdot \frac{n^2 + 2n}{2n^3}.$$

Otrzymujemy więc

$$\frac{n^3}{2n^3 + n^2} \leq a_n \leq \frac{n^3 + 2n^2}{2n^3}$$

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \leq a_n \leq \frac{1 + \frac{2}{n}}{2}.$$

Skrajne ciągi dążą do wspólnej granicy $\frac{1}{2}$, a więc także $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę ciągu

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}.$$

Rozwiązanie: Dzielimy licznik i mianownik przez n:

$$\frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2} = \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} \to \frac{1}{3},$$

gdyż, jak wiemy, z granicą możemy wejść pod pierwiastek. Mamy więc $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{3\,x-2}{2\,x+1}, \qquad D_f = \{x : x \neq -\tfrac{1}{2}\}.$$

Podaj wzór na funkcję odwrotną do f i podaj jej dziedzinę.

Rozwiązanie: Funkcję odwrotną znajdujemy rozwiązując równanie

$$y = \frac{3\,x-2}{2\,x+1}$$

ze względu na x, i pilnując kiedy takie rozwiązanie istnieje. Liczymy:

$$\begin{aligned} (2x+1)y &= 3x-2 \\ 2xy - 3x &= -2-y \\ x(2y-3) &= -2-y \\ x &= \frac{-2-y}{2y-3}. \end{aligned}$$

Takie rozwiązanie istnieje dla $y \neq \frac{3}{2}$, a więc

$$f^{-1}(y) = \frac{-2-y}{2y-3}, \qquad D_{f^{-1}} = \{y : y \neq \tfrac{3}{2}\}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 8. Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\binom{3(n+1)}{n+1} \cdot 6^n}{6^{n+1} \cdot \binom{3n}{n}} \\
&= \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!(2n+2)!}}{6 \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n)!}} \\
&= \frac{(3n+3)!n!(2n)!}{6 \cdot (3n)!(n+1)!(2n+2)!} \\
&= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{6(n+1)(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{(3n+1)(3n+2)}{2(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{9(n+\frac{1}{3})(n+\frac{2}{3})}{8(n+\frac{1}{2})(n+1)} \\
&= \frac{9(1+\frac{1}{3n})(1+\frac{2}{3n})}{8(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{1}{n})} \to \frac{9}{8} > 1.
\end{aligned}$$

Szereg jest więc rozbieżny.