Zadanie 1. Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(l+1)(l+2)} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+2} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l+1} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l+2} = \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} - \sum_{l=3}^{n+2} \frac{1}{l} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 2. Czy następujący szereg jest zbieżny?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1000}{n^3 + 1}$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z kryterium porównawczego. Pierwsza nierówność zachodzi dla n takiego, że $n^2 \geq 2000$, a druga dla $n \geq 1$.

$$\frac{n^2 - 1000}{n^3 + 1} \geq \frac{n^2 - \frac{1}{2}n^2}{n^3 + 1} \geq \frac{n^2 - \frac{1}{2}n^2}{n^3 + n^3} = \frac{1}{4}\,\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{n}.$$

Wiemy, że szereg o wyrazach dodatnich, takich jak po prawej stronie jest rozbieżny (jest to szereg harmoniczny), więc szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1000}{n^3 + 1}$$

też jest rozbieżny, z kryterium porównawczego.

Zadanie 3. Obliczyć sumę szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$$
(dla tych x dla których jest zbieżny).

Rozwiązanie: Jest to szereg geometryczny o ilorazie
$$q = \frac{x^2}{2},$$
a więc jest zbieżny dla $|x| < \sqrt{2}$. Dla tych x mamy
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{2-x^2}.$$

Zadanie 4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

Rozwiązanie: Dowód jest indukcyjny. Dla $n = 1$ równość sprowadza się do

$$1^3 = 1^2.$$

Załóżmy naszą nierówność dla jakiegoś n. Rozważmy $n + 1$. Prawa strona to

$$\begin{aligned}
&(1 + 2 + \ldots + n + (n+1))^2 = \\
&\quad = (1 + 2 + \ldots + n)^2 + 2(1 + 2 \ldots + n)(n+1) + (n+1)^2 \\
&\quad = (1 + 2 + \ldots + n)^2 + 2\,\frac{n(n+1)}{2}\,(n+1) + (n+1)^2 \\
&\quad = (1 + 2 + \ldots + n)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\
&\quad = (1 + 2 + \ldots + n)^2 + (n+1)^2(n+1) \\
&\quad = (1 + 2 + \ldots + n)^2 + (n+1)^3 \\
&\quad = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3,
\end{aligned}$$

z założenia indukcyjnego. Przy założeniu równości dla n udowodniliśmy równość dla $n + 1$, a więc wykonaliśmy krok indukcyjny. Wykorzystaliśmy równość którą zna każde dziecko:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadanie 5. Sprawdź, czy ciąg jest zbieżny, a jeżeli tak, to oblicz granicę

$$a_n = \frac{n^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{2}} + 1} + \frac{n^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{2}} + 2} + \ldots + \frac{n^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{2}} + n}$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z twierdzenia o trzech ciągach

$$n \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{5}{2}} + n} \leq a_n \leq n \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}} + n} \leq a_n \leq \frac{n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{1}{1 + n^{-\frac{3}{2}}} \leq a_n \leq \frac{1 + n^{-\frac{1}{2}}}{1}$$

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}}$$

Rozwiązanie: Składniki sumy pod pierwiastkiem są mniejsze od 1 i jest ich n. Mamy więc

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}} < \sqrt[n]{n}.$$

Możemy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, gdyż skrajne ciągi są zbieżne do 1. Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}} = 1$$

Zadanie 7. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}}$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z twierdzenia o 3 ciągach.

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n + 5^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n + 3^n}{5^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\ \sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}} < \sqrt[n]{2}\ \sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\ \frac{3}{5} < \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}} < \sqrt[n]{2}\ \frac{3}{5}.$$

Skrajne ciągi dążą do $\frac{3}{5}$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}} = \frac{3}{5}.$$

Zadanie 8. Pokaż z definicji, że

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{3n+1}{n+1} \right] = 2$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$2 = \frac{2n+2}{n+1} \leq \frac{3n+1}{n+1} < \frac{3n+3}{n+1} = 3,$$

a więc, z definicji części całkowitej, ciąg jest stały, równy 2.

Zadanie 9. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z definicji liczby e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Manipulując indeksami otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n} &= \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{5-2n}\\ &= \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{5}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-2n}\\ &= \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{5+6}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-2(n+3)}\\ &= \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{11}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{2(n+3)}}\\ &= \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{11}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}}\right)^{2}\\ &\xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

Zadanie 10. Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\ \frac{n^n}{2^n\, n!} \\ &= 2\ \frac{n!\, n^n}{(n+1)^n\, n!} = \frac{2}{\left(\ \frac{n+1}{n}\ \right)^n} \\ &= \frac{2}{\left(\ 1 + \frac{1}{n}\ \right)^n} \ \xrightarrow{n\to\infty}\ \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

Szereg jest więc zbieżny.