

**Kolokwium 2**
1.12.17

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz granicę:

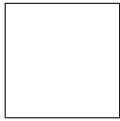
$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan 2x}{\tan(\pi/4 + x)}.$$

Rozwiązanie: To jest wyrażenie postaci $\frac{\infty}{\infty}$ w $\frac{\pi}{4}$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan 2x}{\tan(\pi/4 + x)} \stackrel{\text{d l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\frac{1}{\cos^2(\pi/4+x)}} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \cos^2(\pi/4 + x)}{\cos^2 2x}.$$

Ostatnia granica to wyrażenie postaci $\frac{0}{0}$ w $\frac{\pi}{4}$, więc stosujemy de l'Hospitala ponownie:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \cos^2(\pi/4 + x)}{\cos^2 2x} &\stackrel{\text{d l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-4 \cos(\pi/4 + x) \sin(\pi/4 + x)}{2 \cos 2x (-\sin 2x) \cdot 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos(\pi/4 + x) \sin(\pi/4 + x)}{\cos 2x \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(\pi/2 + 2x)}{\sin 4x} \\ &\stackrel{\text{d l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \cos(\pi/2 + 2x)}{4 \cos 4x} \\ &= \frac{\cos \pi}{2 \cos \pi} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

2

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź promień zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2 + n} - n}.$$

Rozwiązanie: Ustalamy x i stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x^{2(n+1)}}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1)} - (n+1)} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{x^{2n}} \right| = \\ &= |x|^2 \frac{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1)} + (n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= |x|^2 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + (n+1)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= |x|^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &\rightarrow |x|^2. \end{aligned}$$

Szereg jest więc zbieżny bądź rozbieżny w zależności od tego, czy $|x| < 1$ czy $|x| > 1$. Promień zbieżności wynosi więc 1.



Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym przedziale

$$f(x) = \sin 2x - x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartości na końcach przedziału:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi - \left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Szukamy punktów krytycznych:

$$f'(x) = 2 \cos 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6},$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \simeq 0,85 - 0,52 = 0,33,$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \simeq -0,33.$$

Widzimy więc, że wartość największa to $\frac{\pi}{2}$ (przyjęta w $-\frac{\pi}{2}$), a wartość najmniejsza to $-\frac{\pi}{2}$ (przyjęta w $\frac{\pi}{2}$).



Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Dobierz parametry a, b tak, żeby podana funkcja miała pochodną w punkcie 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 1, \\ ax + b & : x > 1. \end{cases}$$

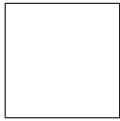
Rozwiązanie: f musi być ciągła w 1:

$$1 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ax + b = a + b.$$

Mamy więc $1 = a + b$. Wiemy (z reguły de l'Hospitala na przykład), że f w punkcie sklejania (jeżeli jest ciągła) ma pochodną \Leftrightarrow granice pochodnych z obu stron w tym punkcie się zgadzają.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} a = a.$$

Mamy więc dodatkowo $a = 2$. Łącząc to z poprzednim równaniem $b = -1$



Pierwsza litera nazwiska

5

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz pochodną podanej funkcji (i podaj dziedzinę pochodnej):

$$f(x) = e^{\sqrt{\log|x|}}.$$

Rozwiązanie: Dziedziną f są liczby $|x| \geq 1$ i dziedziną pochodnej są liczby $|x| > 1$, gdyż wszystkie funkcje składowe są różniczkowalne na odpowiednich zbiorach: $\log|x|$ na $|x| > 1$, \sqrt{x} na $x > 0$, e^x wszędzie. Liczymy pochodną:

$$f'(x) = e^{\sqrt{\log|x|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log|x|}} \cdot \frac{1}{x}.$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź punkty ciągłości i nieciągłości funkcji:

$$f(x) = \{\log_{10} x\}, \quad (\{\dots\} - \text{część ułamkowa}).$$

Rozwiązanie: Dziedziną f są liczby $x > 0$. $\log_{10} x$ jest ciągła wszędzie, a $\{x\}$ jest ciągła na przedziałach $(k, k+1) \forall k \in \mathbb{Z}$, i nieciągła we wszystkich punktach całkowitych. Z ciągłości funkcji złożonej wiemy, że f jest ciągła we wszystkich punktach x takich, że $\log_{10} x \notin \mathbb{Z}$. Czyli we wszystkich punktach, które nie są całkowitą potęgą 10. Rozważmy teraz punkty postaci 10^k , gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10^k-} \{\log_{10} x\} &= \lim_{t \rightarrow k-} \{t\} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 10^k+} \{\log_{10} x\} &= \lim_{t \rightarrow k+} \{t\} = 0. \end{aligned}$$

W punktach postaci 10^k , $k \in \mathbb{Z}$ f jest więc nieciągła. W pozostałych punktach jest ciągła.



Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność i ew. zbieżność absolutną szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}.$$

Rozwiązanie: To jest szereg naprzemienny, więc chcemy skorzystać z kryterium Leibniza. Potrzebujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\log n}{n} &\geq \frac{\log(n+1)}{n+1} \\ \frac{\log(n+1)}{\log n} &\leq \frac{n+1}{n} \\ \log_n(n+1) &\leq 1 + \frac{1}{n} \\ n+1 &\leq n^{1+\frac{1}{n}} \\ 1 + \frac{1}{n} &\leq n^{\frac{1}{n}} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq n. \end{aligned}$$

Wszystkie powyższe nierówności są równoważne, a ostatnia jest prawdziwa dla $n \geq 3$, bo wiemy, że $(1 + \frac{1}{n})^n$ rośnie do $e < 3$. Na mocy kryterium Leibniza szereg jest więc zbieżny. Nie jest zbieżny absolutnie, bo

$$\left| (-1)^n \frac{\log n}{n} \right| = \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \geq 3,$$

a szereg o wyrazach $\frac{1}{n}$ jest rozbieżny.