Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 3} \frac{27-x^3}{x-3}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy ze zwykłego rozkładu

$$27-x^3 = 3^3 - x^3 = (3-x)(3^2+3x+x^2),$$

a więc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{27-x^3}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(3^2+3x+x^2)}{x-3} \\
&= -\lim_{x\to 3}(3^2+3x+x^2) \\
&= -3^2 - 3\cdot 3 - 3^2 \\
&= -27.
\end{aligned}$$

Zadanie 2. Znajdź przedział zbieżności (nie zapomnij o końcach) szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}.$$

Rozwiązanie: Obliczamy promień zbieżności:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n \cdot 5^n}{(n+1) \cdot 5^{n+1}} = \frac{1}{5} \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{5}.$$

Wiemy więc $R = 5$. Pozostało sprawdzić zbieżność szeregu na końcach przedziału $x = \pm 5$. Dla $x = 5$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

a więc szereg jest rozbieżny (jest to szereg harmoniczny). Dla $x = -5$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

a więc szereg jest zbieżny, co wynika z kryterium Leibniza. Ostatecznie więc przedział zbieżności szeregu to $[-5, 5)$.

Zadanie 3. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{3\,\sin 2x}.$$

Rozwiązanie: Wykorzystamy znaną z wykładu granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{4x}{3\,\sin 2x} &= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \\
&= \frac{2}{3} \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} \\
y = 2x \qquad &= \frac{2}{3} \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Zadanie 4. Znajdź przedział zbieżności (nie zapomnij o końcach) szeregu potęgowego.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n.$$

Rozwiązanie: Sprawdzamy zbieżność korzystając z kryt. d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{x^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{x^n n!}{(2n)!}} \right| &= \frac{|x|^{n+1}(n+1)!(2n)!}{|x|^n n!(2n+2)!} \\ &= \frac{|x|(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= |x| \frac{1}{2(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Granica ta jest zerem niezależnie od x, a więc szereg potęgowy jest zbieżny dla każdego x. Jego przedział zbieżności to cała prosta rzeczywista $(-\infty, \infty)$.

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}.$$

Rozwiązanie: Mamy $\sqrt{x^2} = |x|$, a więc, dla $x < 0$ (tylko takie nas interesują)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = -1.$$

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy z kryt. porównawczego

$$\left| \frac{2 + (-1)^n}{n^2} \right| \leq \frac{3}{n^2},$$

i już, zbieżny.

Zadanie 7. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}.$$

Rozwiązanie: Korzystamy ze zwykłej metody pozbywania się pierwiastków w takiej sytuacji, ty razem i w liczniku i w mianowniku

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{(x^2+1-x-1)(1+\sqrt{x+1})}{(1-x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})} =$$

$$= -(x-1)\,\frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}.$$

W tej postaci mianownik ma granicę różną od zera, więc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -(x-1)\,\frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1.$$

Zadanie 8. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1).$$

Rozwiązanie: Skorzystamy z kryterium Leibniza. Wystarczy pokazać, że ciąg współczynników

$$a_n = (\sqrt[n]{2}-1)$$

jest malejący i zbieżny do 0. Oba fakty są oczywiste. Wiemy, że $\sqrt[n]{2} \to 1$. Sprawdźmy, że jest malejący:

$$\sqrt[n]{2}-1 > \sqrt[n+1]{2}-1$$
$$\sqrt[n]{2} > \sqrt[n+1]{2}$$
$$2^{n+1} > 2^n.$$

Szereg jest więc zbieżny.