Pierwsza litera nazwiska

1

Egzamin końcowy
7.02.17

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Udowodnij nierówności:

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, \qquad \text{dla } x > 0.$$

Rozwiązanie: Lewa nierówność: niech

$$F(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Mamy $F(0) = 0$. Gdyby w jakimś punkcie $x_0 > 0$ było $F(x_0) \leq 0$, to z twierdzenia o wartości średniej w jakimś punkcie pośrednim $0 < c < x_0$ mielibyśmy $F'(c) \leq 0$. Ale dla $x > 0$ mamy

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0.$$

W takim razie F musi być ściśle dodatnia dla $x > 0$, a to jest dokładnie lewa nierówność. Prawa nierówność podobnie: niech

$$F(x) = x - \log(1+x).$$

Znowu, $F(0) = 0$ i

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0.$$

Konkluzja jest taka sama, dla $x > 0$ musi być $F(x) > 0$, a to jest dokładnie prawa nierówność.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Wyznacz przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = x\,e^{-2x}.$$

Naszkicuj wykres funkcji.

Rozwiązanie: Funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna:

$$f'(x) = e^{-2x} - 2x\,e^{-2x} = e^{-2x}\,(1-2x),$$
$$f''(x) = -2\,e^{-2x} - 2\,(1-2x)\,e^{-2x} = e^{-2x}\,(-4+4x).$$

$e^{-2x} > 0$, więc znak f'' jest taki sam jak znak $4x-4$. Mamy więc, dla $x < 1$ f'' jest ujemne, i f jest wklęsła a dla $x > 1$ f'' jest dodatnia i f jest wypukła. W konsekwencji $x = 1$ jest jedynym punktem przegięcia. Dla $x \to \infty$ $f(x) \to 0$, dla $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$, oraz $f(0) = 0$. Na $(-\infty, \frac{1}{2})$ funkcja rośnie, a na $(\frac{1}{2}, \infty)$ maleje. Łatwo naszkicować wykres.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź granicę:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Rozwiązanie: Piszemy:

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\frac{\log x}{1-x}}.$$

Korzystając z reguły de l'Hospitala (wyrażenie jest postaci $\frac{0}{0}$ w 1), mamy

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

Z ciągłości e^x mamy:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\log x}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x}} = e^{-1}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = \log(2 - 3x + x^2).$$

Wyznacz promień zbieżności szeregu.

Rozwiązanie: Musimy policzyć $f^{(n)}(0)$. Mamy

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(2 - 3x + x^2) = \log(x-2)(x-1) = \log(x-2) + \log(x-1)\\
f'(x) &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1}\\
f''(x) &= (-1)\,\frac{1}{(x-2)^2} + (-1)\,\frac{1}{(x-1)^2}\\
f'''(x) &= \frac{(-1)(-2)}{(x-2)^3} + \frac{(-1)(-2)}{(x-1)^3}.
\end{aligned}$$

Ogólnie, dla $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!\Big((x-2)^{-n} + (x-1)^{-n}\Big)\\
f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!\Big((-2)^{-n} + (-1)^{-n}\Big) = -(n-1)!\Big(\frac{1}{2^n} + 1\Big).
\end{aligned}$$

Szereg Maclaurina to:

$$\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)!\big(\frac{1}{2^n} + 1\big)\,x^n}{n!} = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}\,\big(2^{-n} + 1\big)\,x^n.$$

Promień zbieżności:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{-1}{n}\,\big(2^{-n}+1\big)}{\frac{-1}{n+1}\,\big(2^{-n-1}+1\big)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\,\frac{2^{-n}+1}{2^{-n-1}+1} = 1.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót obszaru ograniczonego parabolami $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ wokół osi OX.

Rozwiązanie: Parabole przecinają się w punktach $(0,0)$ i $(1,1)$. Dla $0 \leq x \leq 1$ mamy $\sqrt{x} \geq x^2$, więc

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej, i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

Rozwiązanie: Całka ma 2 niewłaściwości, w 1 i w $+\infty$, więc rozbijamy ją na dwie całki, na przykład w punkcie 2:

$$\int_1^\infty = \int_1^2 + \int_2^\infty.$$

Sprawdzamy zbieżność pierwszej:

$$\begin{aligned}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \left\{\begin{array}{c} t = \sqrt{x-1} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx \end{array}\right\} \\ &= \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \frac{2\,dt}{t^2+1} \\ &= 2\arctan t\Big|_{\sqrt{\epsilon}}^1 \\ &= 2\arctan 1 - 2\arctan\sqrt{\epsilon}.\end{aligned}$$

Gdy $\epsilon \to 0^+$, to $\arctan\sqrt{\epsilon} \to 0$, więc całka jest zbieżna, i jest równa $2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

Sprawdzamy zbieżność drugiej całki:

$$\begin{aligned}\int_2^M \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \left\{\begin{array}{c} t = \sqrt{x-1} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx \end{array}\right\} \\ &= \int_1^{\sqrt{M-1}} \frac{2\,dt}{t^2+1} \\ &= 2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{M-1}} \\ &= 2\arctan\sqrt{M-1} - 2\arctan 1.\end{aligned}$$

Gdy $M \to +\infty$ to $\arctan\sqrt{M-1} \to \frac{\pi}{2}$. Całka jest więc zbieżna i jest równa $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
Ostatecznie

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest podany szereg funkcyjny, oraz sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}.$$

Rozwiązanie: Dla dowolnego x mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Z kryterium porównawczego szereg funkcyjny jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$, (bo $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ jest zbieżny), a z kryterium Weierstrassa jest zbieżny jednostajnie na całej prostej.