

**Kolokwium 1**  
**25.11.16**

Nazwisko i imię:

**Zadanie 1.** Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 - 2} + \frac{n^2 - 3}{n^3 + 3} + \cdots + \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^3 - (-1)^n n}.$$

**Rozwiązanie:** Mamy:

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 - 2} + \frac{n^2 - 3}{n^3 + 3} + \cdots + \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^3 - (-1)^n n} &= \sum_{k=1}^n \frac{n^2 + (-1)^k k}{n^3 - (-1)^k k} \\ &\leq n \cdot \frac{n^2 + n}{n^3 - n} = \frac{n^3 + n^2}{n^3 - n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Z drugiej strony,

$$\sum_{k=1}^n \frac{n^2 + (-1)^k k}{n^3 - (-1)^k k} \geq n \cdot \frac{n^2 - n}{n^3 + n} = \frac{n^3 - n^2}{n^3 + n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Z 3 ciągów mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 - 2} + \frac{n^2 - 3}{n^3 + 3} + \cdots + \frac{n^2 + (-1)^n n}{n^3 - (-1)^n n} = 1.$$



Pierwsza litera nazwiska

2

Nazwisko i imię:

**Zadanie 2.** Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}).$$

**Rozwiązanie:** Zauważmy, że

$$\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{8}} \dots 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}}.$$

Ponieważ funkcja  $2^x$  jest ciągła, więc

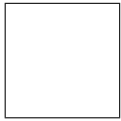
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n})}.$$

Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Ostatecznie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}) = 2^1 = 2.$$



Pierwsza litera nazwiska

3

Nazwisko i imię:

**Zadanie 3.** Zbadaj zbieżność szeregu

$$\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!} + \dots$$

**Rozwiązanie:** Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3^{n+1} (n+1)!}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!}} = \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2n+1}{3n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}.$$

Szereg jest więc zbieżny.



Pierwsza litera nazwiska

4

Nazwisko i imię:

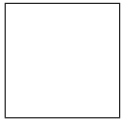
**Zadanie 4.** Zbadaj zbieżność, i ewentualnie zbieżność absolutną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}.$$

**Rozwiązanie:** Badamy zbieżność absolutną, korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Szereg jest więc zbieżny absolutnie.



Pierwsza litera nazwiska

5

Nazwisko i imię:

**Zadanie 5.** Znajdź parametry  $a, b$  dla których podana funkcja jest ciągła:

$$f(x) = \begin{cases} x & : |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & : |x| > 1. \end{cases}$$

**Rozwiązanie:** Są dwa punkty sklejenia,  $\pm 1$ . Liczymy granice jednostronne w obu punktach.

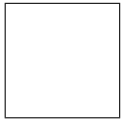
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + ax + b = 1 - a + b, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + ax + b = 1 + a + b. \end{aligned}$$

Powstały układ równań

$$1 - a + b = -1,$$

$$1 = 1 + a + b,$$

łatwo rozwiązać, otrzymujemy  $a = 1$ ,  $b = -1$ .



Pierwsza litera nazwiska

6

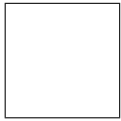
Nazwisko i imię:

**Zadanie 6.** Znajdź granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1}).$$

**Rozwiązanie:** Stosujemy znany trick:

$$\begin{aligned} x^{3/2} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1}) &= x^{3/2} \frac{(\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1}) \cdot (\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1})}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1}} \\ &= \frac{2 \cdot x^{3/2}}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1}} \\ &= \frac{2 \cdot x^{3/2}}{x^{3/2} (\sqrt{1 + x^{-3}} + \sqrt{1 - x^{-3}})} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

7

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 7.** Udowodnij, że jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła, to funkcja

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0 \\ 0 & : f(x) < 0 \end{cases}$$

też jest ciągła.

**Rozwiązanie:** Można zauważyć, że mamy  $\tilde{f} = g \circ f$ , gdzie funkcja  $g$  dana jest wzorem:

$$g(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0. \end{cases}$$

Funkcja  $g$  jest ciągła, więc  $\tilde{f}$  też jest ciągła, jako złożenie funkcji ciągłych.