



Pierwsza litera nazwiska

1

Egzamin 2 termin
15.02.16

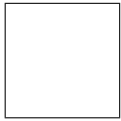
Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę:

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} \cdot e^x \, dx \\ \frac{2t \, dt}{t^2 + 1} = dx \end{array} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} \, dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) \, dt \\ &= 2(t - \arctan t) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - 2(0 - 0) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

2

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz pole figury, ograniczonej krzywymi:

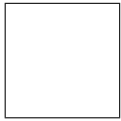
$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

Rozwiązanie: Szukamy punktów przecięcia krzywych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 1} &= \frac{x^2}{2} \\ 2 &= x^4 + x^2, \quad t = x^2 \\ t^2 + t - 2 &= 0 \\ (t + 2)(t - 1) &= 0 \\ t &= 1 \vee t = -2, \end{aligned}$$

czyli $t = x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Nasza figura mieści się zatem powyżej odcinka $[-1, 1]$, a na tym odcinku $\frac{1}{x^2+1} \geq \frac{x^2}{2}$, a więc

$$\begin{aligned} \text{Pole} &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \left(\arctan x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2 \left(\arctan 1 - \frac{1}{6} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź długość wykresu funkcji $f(x) = \log x$ nad odcinkiem $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{1+x^2} \\ dt = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ \frac{t dt}{t^2-1} = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} \\ &= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1} dt \\ &= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt \\ &= \int_2^3 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right) dt \\ &= \left(t + \frac{1}{2} \log |t-1| - \frac{1}{2} \log |t+1|\right) \Big|_2^3 \\ &= 3 + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 4 - 2 - \frac{1}{2} \log 1 + \frac{1}{2} \log 3 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} \\ &= 1 + \log \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność następującej całki niewłaściwej, i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx, \quad \left(\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

Rozwiązanie: Jediną niewłaściwością tej całki jest fakt, że funkcja $\cot x$ nie jest ograniczona w otoczeniu lewego końca przedziału: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx &= \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right\} \\ &= \int_{\sin \epsilon}^1 \frac{dt}{t} \\ &= \log |t| \Big|_{\sin \epsilon}^1 \\ &= -\log \sin \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} +\infty. \end{aligned}$$

Całka ta nie jest więc zbieżna.



Pierwsza litera nazwiska

5

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Udowodnij, że:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} \\ &= - \int_1^0 \frac{dt}{\arccos x} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\arccos x}. \end{aligned}$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę:

$$\int \cos 5x \sin 3x \, dx.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez części 2-krotnie:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x \sin 3x \, dx &= \int \left(\frac{\sin 5x}{5} \right)' \sin 3x \, dx \\ &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} - \frac{3}{5} \int \sin 5x \cos 3x \, dx \\ &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} - \frac{3}{5} \int \left(-\frac{\cos 5x}{5} \right)' \cos 3x \, dx \\ &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} + \frac{3 \cos 5x \cos 3x}{25} + \frac{9}{25} \int \cos 5x \sin 3x \, dx. \end{aligned}$$

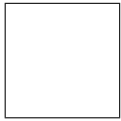
Mamy więc:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{9}{25} \right) \int \cos 5x \sin 3x \, dx &= \frac{\sin 5x \sin 3x}{5} + \frac{3 \cos 5x \cos 3x}{25} + C, \\ \int \cos 5x \sin 3x \, dx &= \frac{5 \sin 5x \sin 3x + 3 \cos 5x \cos 3x}{16} + C. \end{aligned}$$

Można inaczej, wiedząc że $\cos A \sin B = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\cos 8x}{8} + \frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{2} + C \\ &= \frac{4 \cos 2x - \cos 8x}{16} + C. \end{aligned}$$

Zauważmy, że obie odpowiedzi są równe



Pierwsza litera nazwiska

7

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź najmniejszą i największą wartość podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |10x - 1| + x^3, \quad x \in [0, 1].$$

Rozwiązanie: Mamy końce: $f(0) = 1$, $f(1) = 10$, mamy punkt nieróżniczkowalności $f(\frac{1}{10}) = \frac{1}{1000}$. Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

$$x \in \left[0, \frac{1}{10}\right] \Rightarrow f(x) = 1 - 10x + x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}, \text{ poza przedziałem,}$$

$$x \in \left[\frac{1}{10}, 1\right] \Rightarrow f(x) = 10x - 1 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 10 + 3x^2$$

$$\Rightarrow \text{pochodna nigdzie się nie zeruje}$$

Mamy więc wartość najmniejszą $\frac{1}{1000}$ osiągniętą w $\frac{1}{10}$ i wartość największą 10 osiągniętą w 1.